Chapitre 1

Bissimulation

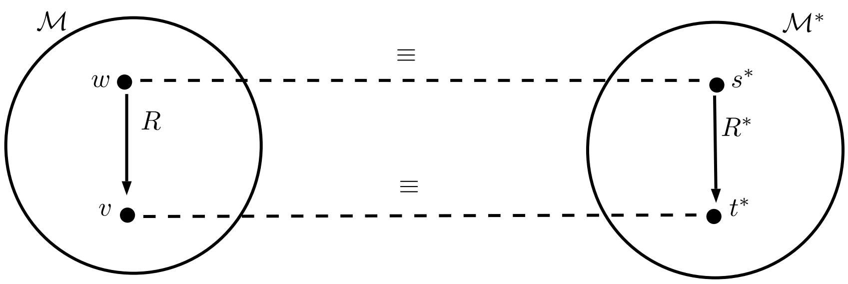
Fixons deux modèles

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \text{ et } \mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$$

pour un langage modal propositionnel. Les mondes de W seront notés w, v, w_1, etc., ceux de W^*, s^*, t^*, u^*, etc.
Nous conserverons cette notation pour le reste de ce chapitre.

Définition 1 *Une bissimulation entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^*$ est une relation binaire (notée $\equiv$) entre W et W^* (donc $\equiv \subseteq W \times W^*$) telle que pour chaque $w \in W$ et $s^* \in W^*$, on a :*

$$w \equiv s^* \Rightarrow \begin{cases} \text{a) } w \text{ et } s^* \text{ satisfont les mêmes formules atomiques : } \langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash p_i \iff \langle \mathcal{M}^*, s^* \rangle \vDash p_i. \\ \text{b) Si } R(w,v)\text{, alors il y a } t^* \in W^* \text{ tel que } R^*(s^*, t^*) \text{ et } v \equiv t^* \\ \text{c) Si } R^*(s^*, t^*)\text{, alors il y a } v \in W \text{ tel que } R(w,v) \text{ et } v \equiv s^*. \end{cases}$$



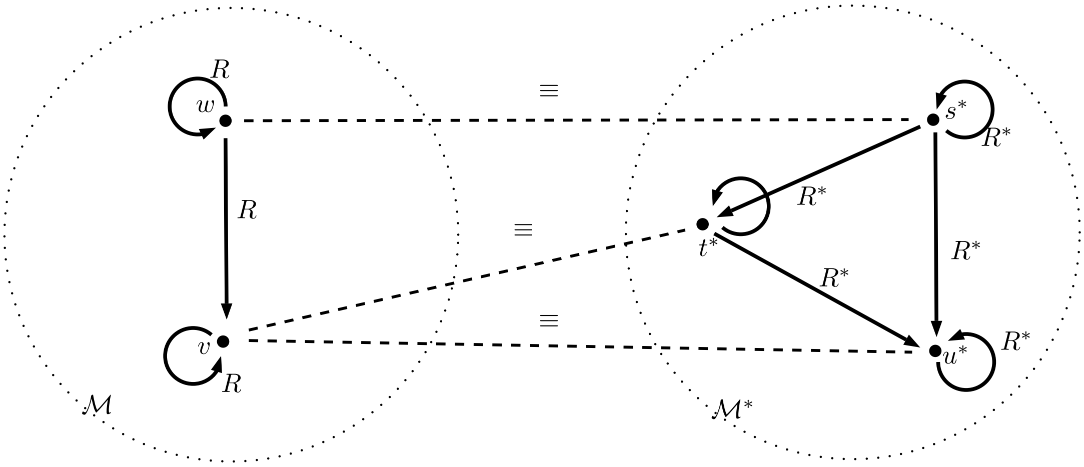
Exemple 2 *On fixe les deux structures d'un même langage de la façon suivante :*

$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ *, avec*

- $W = \{w, v\}$
- $R = \{\langle w, v \rangle, \langle w, w \rangle, \langle v, v \rangle\}$
- $V(p) = \{w\}$

$\mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$ *, avec*

- $W^* = \{s^*, t^*, u^*\}$
- $R^* = \{\langle s^*, s^* \rangle, \langle s^*, t^* \rangle, \langle s^*, u^* \rangle, \langle t^*, u^* \rangle, \langle t^*, t^* \rangle, \langle u^*, u^* \rangle\}$
- $V^*(p) = \{s^*\}$



La relation $\equiv = \{\langle w, s^*\rangle, \langle v, t^*\rangle, \langle v, u^*\rangle\}$ *est une bissimulation.*
D'abord on vérifie que les mondes en relation par la bissimulation vérifient les mêmes formules atomiques :
– $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash p$ *et* $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash p$*, car* $w \in V(p)$ *et* $s^* \in V^*(p)$
– $\langle \mathcal{M}, v\rangle \nvDash p$ *et* $\langle \mathcal{M}^*, t^*\rangle \nvDash p$*, car* $v \notin V(p)$ *et* $t^* \notin V^*(p)$
– $\langle \mathcal{M}, v\rangle \nvDash p$ *et* $\langle \mathcal{M}^*, u^*\rangle \nvDash p$*, car* $v \notin V(p)$ *et* $u^* \notin V^*(p)$
Ensuite on vérifie la propriété b) de la ***Définition 1*** *:*
– $w \equiv s^*$ *et* $R(w, w)$*, de même* $R^*(s^*, s^*)$ *et* $s^* \equiv w$.
– $w \equiv s^*$ *et* $R(w, v)$*, de même* $R^*(s^*, t^*)$ *et* $t^* \equiv v$.
– $v \equiv t^*$ *et* $R(v, v)$*, de même* $R^*(t^*, t^*)$ *et* $t^* \equiv v$.
– $v \equiv u^*$ *et* $R(v, v)$*, de même* $R^*(u^*, u^*)$ *et* $u^* \equiv v$.
Enfin on vérifie la propriété c) :
– $s^* \equiv w$ *et* $R^*(s^*, s^*)$*, de même* $R(w, w)$ *et* $w \equiv s^*$.
– $s^* \equiv w$ *et* $R^*(s^*, t^*)$*, de même* $R(w, v)$ *et* $v \equiv t^*$.
– $s^* \equiv w$ *et* $R^*(s^*, u^*)$*, de même* $R(w, v)$ *et* $v \equiv u^*$.
– $t^* \equiv v$ *et* $R^*(t^*, t^*)$*, de même* $R(v, v)$ *et* $v \equiv t^*$.
– $t^* \equiv v$ *et* $R^*(t^*, u^*)$*, de même* $R(v, v)$ *et* $v \equiv u^*$.
– $u^* \equiv v$ *et* $R^*(u^*, u^*)$*, de même* $R(v, v)$ *et* $v \equiv u^*$.

Exercice 3 q *est la seule proposition de notre langage* $\mathcal{L}$*, et on a par ailleurs :*

la structure $\mathcal{M}$ *telle que :*
– $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$
– *Avec* $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
– $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$
– $V(q) = \{2, 3, 4, 5\}$.

la structure $\mathcal{M}^*$ *telle que :*
– $\mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^*\rangle$
– *Avec* $W^* = \{a, b, c, d\}$
– $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle\}$
– $V^*(q) = \{b, c, d\}$.

1. *Tracez un schéma représentant les relations entre les mondes de* W*, et entre les mondes de* W^*.
2. *Vérifiez que* $\equiv = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, c\rangle, \langle 4, d\rangle, \langle 5, d\rangle\}$ *est une bissimulation entre* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}^*$.

3. *Existe-t-il d'autres bissimulations entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^*$? Si oui, lesquelles ?*

Théorème 4 (de bissimulation) *Soient $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ et $\mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^*\rangle$ deux modèles du même langage modal $\mathcal{L}$. Si $\equiv$ est une bissimulation entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^*$, alors pour tout $w \in W$, $s^* \in W^*$ et pour toute formule A de $\mathcal{L}$:*

$$w \equiv s^* \Longrightarrow [\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash A \iff \langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash A]$$

Démonstration 5 *La démonstration se fait par induction sur la longueur des formules. L'hypothèse d'induction est que pour chaque $w \in W$, $s^* \in W^*$ et formule B de complexité moindre que A, on a :*

$$w \equiv s^* \Rightarrow [\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash B \iff \langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash B]$$

Si A est atomique *Supposons que $w \equiv s^*$, alors*

$$\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash p_i \iff \langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash p_i$$

est valide en vertu de la propriété a) de la bissimulation.

Si A est $\Diamond B$ *Supposons que $w \equiv s^*$ et $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Diamond B$. Par définition des conditions de validité de $\Diamond$, il y a $v \in W$ tel que $R(w, v)$ et $\langle \mathcal{M}, v\rangle \vDash B$.*
Par la propriété b), il y a un $t^* \in W^*$ tel que $R^*(s^*, t^*)$ et $t^* \equiv v$. Puisque B est de complexité moindre que $\Diamond B$, et que $t^* \equiv v$, on peut appliquer l'hypothèse d'induction et on a :

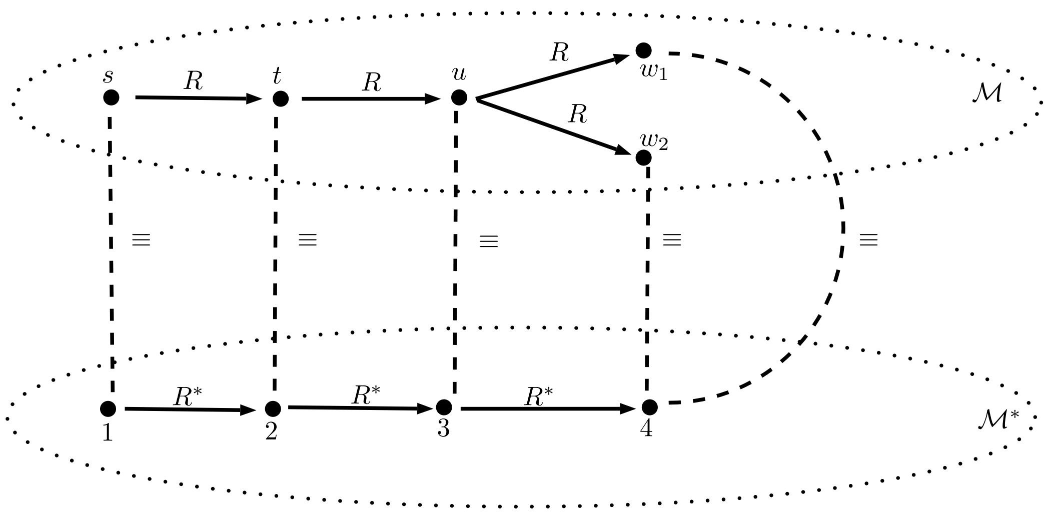
$$\langle \mathcal{M}, v\rangle \vDash B \iff \langle \mathcal{M}^*, t^*\rangle \vDash B$$

Donc $\langle \mathcal{M}^*, t^*\rangle \vDash B$ et étant donné que $R^*(s^*, t^*)$, on a $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash \Diamond B$.
Démontrer que $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash \Diamond B$ implique que $\langle \mathcal{M}, v\rangle \vDash \Diamond B$ se fait de façon analogue.

Si A est $B \wedge C$ *Si $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash B \wedge C$, alors $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash B$ et $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash C$, car il est toujours possible d'éliminer la conjonction.*
Si $w \equiv s^*$, alors par hypothèse d'induction, puisque B et C sont de complexité moindre que A, $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash B$ et $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash C$. Par introduction de la conjonction, on obtient $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash B \wedge C$.

La démonstration avec les autres connecteurs logiques ($\vee$, $\rightarrow$, $\Box$, $\forall$, $\exists$) est laissée au lecteur.

Exercice 6 $V(p) = \{w_1, w_2\}$, $V^*(p) = \{4\}$.



1. *Décrivez les structures* $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ *et* $\mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$ *en langage ensembliste.*
2. *Vérifier que* $\equiv$ *est bien une bissimulation entre* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}^*$.
3. *Existe-t-il d'autres bissimulation entre ces structures ? Si oui, lesquelles ?*

Définition 7 *On dit qu'une formule modale* A *définit une propriété* O *de la relation d'accessibilité si pour chaque modèle* $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$*, on a*

$$\mathcal{M} \vDash A \iff R \text{ a la propriété } O.$$

Rappel 8 $\mathcal{M} \vDash A \iff \langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash A$ *pour chaque* $w \in W$.

Théorème 9 *Il n'y a aucune formule modale qui définit l'irreflexivité*[1].

Démonstration 10 *On montre grâce à la méthode de bissimulation qu'il n'existe pas de formule modale* A *telle que pour chaque modèle on a*

$$\mathcal{M} \vDash A \iff R \text{ est irréflexive.}$$

Supposons, par l'absurde, qu'il y a une formule A *qui remplisse cette condition.*

Soit $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ *où*

- $W = \{w\}$
- $R = \{\langle w, w \rangle\}$
- V *est indifférent.*

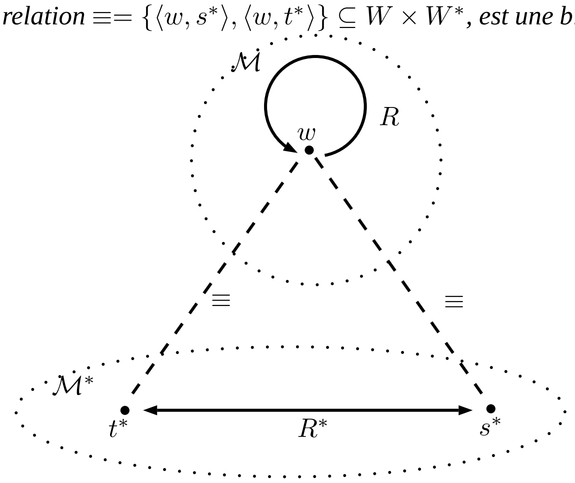
Etant donné que $R(w, w)$*, on doit avoir* $\langle \mathcal{M}, w \rangle \nvDash A$.

Soit $\mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$ *où*

- $W^* = \{s^*, t^*\}$
- $R^* = \{\langle s^*, t^* \rangle, \langle t^*, s^* \rangle\}$
- $V^* = \begin{cases} W^* \text{ si } V(p_i) = \{w\} \\ \emptyset \text{ si } V(p_i) = \emptyset \end{cases}$

Puisqu'on a $\neg R^*(s^*, s^*)$*, on a* $\langle \mathcal{M}^*, s^* \rangle \vDash A$*. On a de même* $\neg R^*(t^*, t^*)$*, donc* $\langle \mathcal{M}^*, t^* \rangle \vDash A$*, et on en déduit que* $\mathcal{M}^* \vDash A$.

La relation $\equiv = \{\langle w, s^* \rangle, \langle w, t^* \rangle\} \subseteq W \times W^*$*, est une bissimulation entre* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}^*$.



Puisqu'on a $w \equiv t^*$ *et* $w \equiv s^*$*, par le théorème 4 de bissimulation, on doit avoir pour toute formule* C : $\langle \mathcal{M}^*, s^* \rangle \vDash C \iff \langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash C \iff \langle \mathcal{M}^*, t^* \rangle \vDash C$.

Or on a vu que $\mathcal{M}^* \vDash A$ *et* $\mathcal{M} \nvDash A$*. De cette contradiction on conclut que la formule* A *qui définit l'irréflexivité n'existe pas.*

[1] La relation R est irréflexive si et seulement si $\forall w \in W\ \neg Rww$

Exercice 11 *Démontrez que la relation* $\equiv = \{\langle w, s^* \rangle, \langle w, t^* \rangle\}$ *de la démonstration précédente est bien une bissimulation entre* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}^*$*.*