Trouver un contre-modèle

Clément Aubert

17 décembre 2008

Table des matières

1 Comment trouver un contre-modèle ?

Afin de montrer qu'une formule A n'est pas valide dans une classe de structures en S5, il faut trouver un modèle $M = \langle S, I\rangle$ avec $S = \langle W, D, w_0\rangle$ et I en les définissant correctement :
$I(w, c) \in D$ pour chaque monde w et chaque constante individuelle c.
$I(w, P) \subseteq D^n$ pour chaque monde w et chaque symbole de prédicat P d'arité n.
et une assignation g
De sorte que $\langle M, w_0, g\rangle \not\models A$.

1.1 $\not\models [\Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)] \rightarrow \Diamond(F(a) \wedge G(a))$

Nous allons trouver un contre-modèle pour la formule :

$$A =: [\Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)] \rightarrow \Diamond(F(a) \wedge G(a))$$

Afin de montrer que $\langle M, w_0, g\rangle \not\models A$, il faut montrer que :

1. $\langle M, w_0, g\rangle \models \Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)$

2. $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash \Diamond(F(a) \wedge G(a))$

1.1.1 $\langle M, w_0, g\rangle \vDash \Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)$

Pour montrer 1., il faut montrer que

a) $\langle M, w_0, g\rangle \vDash \Diamond F(a)$

b) $\langle M, w_0, g\rangle \vDash \Diamond G(a)$

Pour a), il suffit de trouver un monde v_0 tel que : a*) $\langle M, v_0, g\rangle \vDash F(a)$
Pour b), il suffit de trouver un monde v_1 tel que : b*) $\langle M, v_1, g\rangle \vDash G(a)$

Nous commençons à construire notre structure $S = \langle W, D, w_0\rangle$:

- W doit contenir au moins trois mondes : w_0, v_0, v_1.
- D doit contenir au moins deux individus, n et m.
- n va servir de dénotation pour la constante a dans v_0.
- m va servir de dénotation pour la constante a dans v_1.
- On a donc : $I(v_0, a) = n$ et $I(v_1, a) = m$.

Afin que a*) et b*) soient le cas, il faut que n appartienne à la dénotation de F dans v_0, et que m appartienne à l'interprétation de G dans v_1 : $I(v_0, F) = \{n\} \quad I(v_1, G) = \{m\}$

1.1.2 $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash \Diamond(F(a) \wedge G(a))$

Pour montrer 2., il faut montrer que dans chaque monde t de W, on a :

$$\langle W, t, g\rangle \nvDash F(a) \wedge G(a)$$

Comme W contient trois mondes, on doit montrer que :

- i) $\langle W, w_0, g\rangle \nvDash F(a) \wedge G(a)$
- ii) $\langle W, v_0, g\rangle \nvDash F(a) \wedge G(a)$
- iii) $\langle W, v_1, g\rangle \nvDash F(a) \wedge G(a)$

Pour i), il faut montrer (ia) $\langle W, w_0, g\rangle \nvDash F(a)$ ou $\langle W, w_0, g\rangle \nvDash G(a)$
Pour ii), il faut montrer (iia) $\langle W, v_0, g\rangle \nvDash F(a)$ ou $\langle W, v_0, g\rangle \nvDash G(a)$
Pour iii), il faut montrer (iiia) $\langle W, v_1, g\rangle \nvDash F(a)$ ou $\langle W, v_1, g\rangle \nvDash G(a)$

Pour (ia), il suffit de mettre $I(w_0, F) = \emptyset$
Pour (iia), il suffit de mettre $I(v_0, G) = \emptyset$. (On a déjà $I(v_0, F) = \{n\}$)
Pour (iiia), il suffit de mettre $I(v_1, F) = \emptyset$. (On a déjà $I(v_1, G) = \{m\}$).

1.1.3 Pour résumer

Le langage $\mathcal{L}$ contient trois constantes non-logiques : $a^{\langle 0\rangle}$, $F^{\langle 1\rangle}$, $G^{\langle 1\rangle}$.
Le modèle $M = \langle S, I\rangle$ est tel que $S = \langle W, D, w_0\rangle$ avec $W = \{w_0, v_1, v_2\}$ et $D = \{n, m\}$.
$I(w_0, a) = n$ *On pourrait très bien avoir $I(w_0, a) = m$.*
$I(w_0, F) = \emptyset$, $I(v_0, G) = \emptyset$, $I(v_1, F) = \emptyset$
Les autres valeurs $I(v_0, a)$, $I(v_1, a)$, $I(w_0, G)$, $I(v_0, F)$, $I(v_1, G)$, ainsi que les valeurs de g peuvent être choisies indifférement.
On a avec un modèle ainsi construit :

- $\langle M, w_0, g\rangle \vDash \Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)$
- $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash \Diamond(F(a) \wedge G(a))$

Donc : $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash [\Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)] \rightarrow \Diamond(F(a) \wedge G(a))$
Et puisqu'il existe un contre-modèle à cette formule A, elle n'est pas vraie dans la classe de tous les modèles :

$$\nvDash [\Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)] \rightarrow \Diamond(F(a) \wedge G(a))$$

1.2 $\nvDash \Box\exists x F(x) \longrightarrow \exists x \Box F(x)$

Nous allons produire un contre-modèle $M = \langle S, I\rangle$ pour $A =: \Box\exists x F(x) \rightarrow \exists x \Box F(x)$.
Il faut montrer que $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash A$, ce qui revient à montrer que :

1. $\langle M, w_0, g\rangle \vDash \Box\exists x F(x)$
2. $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash \exists x \Box F(x)$

1.2.1 $\langle M, w_0, g\rangle \vDash \Box\exists x F(x)$

1. dit que la dénotation de F doit être non-vide dans chaque monde v de W, y compris le monde actuel w_0.
Nous allons stipuler :

$$W = \{w_0, v_1\}$$
$$I(w_0, F) \neq \emptyset, I(v_1, F) \neq \emptyset$$

1.2.2 $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash \exists x \Box F(x)$

2. dit qu'il n'y a pas d'individu a dans D de façon que
$\langle M, w_0, g(x/a)\rangle \vDash \Box F(x)$ +
En d'autres termes, pour chaque individu a on a :
$\langle M, w_0, g(x/a)\rangle \nvDash \Box F(x)$ ++
Ce qui revient à dire que pour chaque individu a il y a un monde v tel que

$$a \notin I(v, F)$$

1.2.3 Construction du modèle

On construit notre modèle de cette façon : $\begin{array}{ll} W = \{w_0, v_1\} & D = \{n, m\} \\ I(w_0, F) = \{n\} & I(v_1, F) = \{m\} \end{array}$
On observe que n n'appartient pas à $I(v_1, F)$, et m n'appartient pas à $I(w_0, F)$.
Les autres valeurs ne comptent pas.

1.3 $\vDash \Diamond\exists x(x = a \wedge \Box F(x)) \rightarrow F(a)$

Montrons que la formule $A =: \Diamond\exists x(x = a \wedge \Box F(x)) \rightarrow F(a)$ est vraie dans chaque modèle $M = \langle S, I\rangle$ où I est constante, c'est-à-dire que pour tous les mondes v, t dans W, on a :

$$I(v, a) = I(t, a) \qquad (+)$$

En d'autres termes, on a un désignateur rigide : la valeur de a est fixée pour tous les mondes de W.

1.3.1 Démonstration par l'absurde

Supposons qu'on ait un modèle $M = \langle S, I \rangle$ qui satisfait (+) et tel que $\langle M, w_0, g \rangle \not\models A$.
Donc

1. $\langle M, w_0, g \rangle \models \Diamond \exists x (x = a \land \Box F(x))$
   et
2. $\langle M, w_0, g \rangle \not\models F(a)$
   Par 1., il y a un monde v tel que
3. $\langle M, v, g \rangle \models \exists x (x = a \land \Box F(x))$
   Soit m un individu dans D tel que
4. $\langle M, v, g(x/m) \rangle \models (x = a \land \Box F(x))$
   Donc :
5. $m = I(v, a)$
   et
6. $m \in I(t, F)$ pour chaque t dans W.

En particulier :

$$M \in I(w_0, F)$$

Par 2., on a :

$$I(w_0, a) \notin I(w_0, F)$$

Mais $I(w_0, a) = I(v, a)$, par 5. et le fait que a est un désignateur rigide. Donc $m \in I(w_0, F)$ et $m \notin I(w_0, F)$, ce qui est une contradiction.

1.4 Les formules de Barcan

1.4.1 $\models \forall x \Box F(x) \rightarrow \Box \forall x F(x)$

$\forall x \Box F(x) \rightarrow \Box \forall x F(x)$ est une formule valide. Supposons par l'absurde qu'il y a un modèle $M = \langle S, I \rangle$ et une assignation g tels que

1. $\langle M, w_0, g \rangle \models \forall x \Box F(x)$
2. $\langle M, w_0, g \rangle \not\models \Box \forall x F(x)$
   Par 1., tout individu m dans D est tel que
3. $m \in I(v, F)$ pour chaque v dans W.

Mais par 2., il y a un t dans W et un individu m dans D tel que :

$$m \notin I(t, F)$$

Mais cela contredit 3..
La validité de la formule de Barcan est contre-intuitive. Cette formule dit que si chaque individu qui actuellement existe a la propreté F dans chaque monde possible, alors dans chaque monde possible, chaque individu dans ce monde-là est F.
La validité de la formule de Barcan dans notre modèle provient du fait que tous les mondes ont le même univers. S'il y avait plus d'individus dans les autres mondes que dans le monde actuel, alors $\forall x \Box F(x) \rightarrow \Box \forall x F(x)$ ne serait pas valide.

1.4.2 $\models \forall x \Box \exists y\ y = x$

L'hypothèse d'un seul univers commun à tous les mondes de W rend aussi vraie cette formule. Cette formule dit que chaque individu existe nécessairement.
Supposons, par l'absurde, qu'il y a un modèle $M = \langle S, I \rangle$ et une assignation g tels que

$$\langle M, w_0, g \rangle \not\models \forall x \exists y\ y = x$$

Donc il y a un individu m dans D tel que

$$\langle M, v, g(x/m) \rangle \not\models \exists y\ y = x$$

Ce qui revient à dire que

$$\langle M, v, g(x/m) \rangle \models \forall y\ y \neq x$$

Mais cela est impossible !

1.5 $\models \exists x \Box A \rightarrow \Box \exists x A$

Cette formule est valide, et on le prouve par l'absurde.
Supposons qu'il existe un modèle $M = \langle S, I \rangle$ et une assignation g tels que

1. $\langle M, w_0, g \rangle \models \exists x \Box A$
2. $\langle M, w_0, g \rangle \not\models \Box \exists x A$

1. est le cas si et seulement si il existe un $a \in D$ tel que

$$\langle M, w_0, g(x/a) \rangle \models \Box A$$

C'est-à-dire que dans tout monde $v \in W$, $\langle M, v, g(x/a) \rangle \models A$ (+)

2. est le cas si et seulement si il existe un monde $v_1 \in W$ tel que

$$\langle M, v_1, g \rangle \not\models \exists x A$$

C'est-à-dire si qu'il n'existe pas de $m \in D$ tel que $\langle M, v_1, g(x/m) \rangle \models A$ (++)
Or (+) et (++) se contredisent, puisque a rend vrai A dans tout monde de W.

1.5.1 Portée philosophique

La démonstration n'empêche pas les objections philosophiques : supposons que les objets physiques soient nécessairement physiques. Dans ce cas, $\exists x \Box P(x)$ semble vrai quand on prend P comme *être physique*. Mais dans ce cas, $\Box \exists x P(x)$ doit être vrai, et cela rend impossible l'existence de mondes où aucun objet n'est physique. Pour bloquer la validité de cette formule, il suffit qu'il y ait des mondes qui contiennent moins d'objets que le monde actuel.
En 1.4, on a vu que pour bloquer la validité des forumes de Barcan, on a besoin de mondes qui contiennent plus d'individus que le monde actuel.
Cela nous suggère qu'il existe des modèles de Kripke à univers variables.

1.5.2 Modèle à univers variables

On définit un système de la forme

$$S = \langle W, D, E, w_0 \rangle$$

Avec :
- W est un ensemble de mondes possibles
- D est un super-univers
- E est une fonction qui associe à chaque monde v dans W un univers $E(v) \subseteq D$.
- w_0 est le monde actuel.

Intuitivement, $E(v)$ est l'ensemble des individus qui existent dans v.
La définition d'un modèle $M = \langle S, I \rangle$ reste la même qu'auparavant. On définit

$$\langle M, w, g \rangle \vDash A$$

de la même façon qu'auparavant, sauf pour la clause

$$\langle M, w, g \rangle \vDash \forall x A \iff \text{pour chaque } a \text{ dans } E(w) : \langle M, w, g(x/a) \rangle \vDash A$$

Avec cette nouvelle sémantique, on trouve des contre-modèles pour les formules
- $\forall x \Box F(x) \to \Box \forall x\ F(x)$
- $\exists x \Box F(x) \to \Box \exists x\ F(x)$
- Etc.