Chapitre 1

Correspondance

Fixons un langage modal $\mathcal{L}$ dont les atomes (symboles propositionnels) sont $p_1, ..., p_k$. Il y a une traduction qui associe à chaque formule A du langage $\mathcal{L}$ une formule $St_x(A)$ d'un langage du premier ordre (dans une seule variable libre x) dont les seuls symboles non-logiques sont $\underline{\underline{R}}, P_1, ..., P_k$, où

- $\underline{\underline{R}}$ est un symbole de relation à deux place
- $P_1, ..., P_k$ sont des symboles de relation à une place.

On suppose ici que $\mathcal{L}$ contient seulement les connecteurs modaux $\Box$ et $\Diamond$.

Définition 1 *On définit la traduction par récurrence :*

$St_x(p_i) = P_i(x)$

$St_x(\neg p_i) = \neg P_i(x)$

$St_x(A \wedge B) = St_x(A) \wedge St_x(B)$

$St_x(A \vee B) = St_x(A) \vee St_x(B)$

$St_x(\Diamond A) = \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(A))$

$St_x(\Box A) = \forall y(\underline{\underline{R}}(x, y) \to St_y(A))$

Remarque 2 *On observe que $St_x(A)$ est la traduction dans la variable x ; $St_y(A)$ est la traduction dans la variable y.*

Exemple 3 **a)** $St_x(\Diamond p_1) = \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \wedge P_1(y))$

b) $St_x(\Box p_1) = \forall y(\underline{\underline{R}}(x, y) \to P_1(y))$

c) $St_x(\Box\Box p_2) = \forall y(\underline{\underline{R}}(x, y) \to St_y(\Box p_2))$

Mais $St_y(\Box p_2) = \forall z(\underline{\underline{R}}(y, z) \to P_2(z))$

Donc$St_x(\Box\Box p_2) = \forall y(\underline{\underline{R}}(x, y) \to \forall z(\underline{\underline{R}}(y, z) \to P_2(z)))$

Définition 4 (L'association du modèle de $\mathcal{L}$ avec un modèle de $\mathcal{L}^{FO}$) *A chaque modèle $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ pour le langage $\mathcal{L}$ on associe un modèle $\mathcal{M}^{\mathrm{FO}} = \langle D, I\rangle$ du langage du premier ordre $\mathcal{L}^{FO} = \{\underline{\underline{R}}, P_1, ..., P_k\}$ de la façon suivante :*

- *D est W*
- *$I(\underline{\underline{R}}) = R$*
- *$I(P_i) = V(p_i)$*

Exemple 5 *Soient $\mathcal{L} = \{p_1, p_2\}$ et $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ où*

$W = \{w_1, w_2\}$
$R = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle\}$
$V(p_1) = \{w_1\}, V(p_2) = \{w_2\}$

Le modèle associé en langage du premier ordre est alors $\mathcal{M}^{\mathrm{FO}} = \langle D, I\rangle$ où

$D = W$
$I(\underline{\underline{R}}) = R$
$I(P_1) = \{w_1\}, I(P_2) = \{w_2\}$

Proposition 6 *Pour chaque formule A du langage modal $\mathcal{L}$, chaque modèle $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ et chaque monde $w \in W$, on a :*

$\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash A \iff$ *Pour chaque assignation g telle que $g(x) = w$ on a :* $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \vDash St_x(A)$

Démonstration 7 *Par induction sur A :*

Si A est atomique *, c'est-à-dire que A est p_i. On doit montrer que*

$\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash p_i \iff$ *Pour chaque assignation g telle que $g(x) = w$,* $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle P_i(x)$

- *Supposons que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash p_i$. Donc $w \in V(p_i)$. On a $\mathcal{M}^{\mathrm{FO}} = \langle D, I\rangle$ avec $D = W$ et I définie comme auparavant.*
  Comme $w \in V(p_i)$, par définition, $w \in I(P_i)$. Soit g une assignation telle que $g(x) = w$. On a évidemment $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \vDash P_i(x)$ car
  $$\begin{aligned}\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \vDash P_i(x) &\iff x^{\mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g} \in I(P_i)\\ &\iff w \in V(p_i)\end{aligned}$$
  Et on a déjà vu que $w \in V(p_i)$.
- *Pour l'autre direction, on suppose que $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \vDash P_i(x)$ pour chaque assignation g telle que $g(x) = w$. Donc $w \in I(P_i)$. Mais $I(P_i) = V(p_i)$, donc $w \in V(p_i)$, ce qui veut dire que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash p_i$.*

Si A est $\Diamond B$ *, $St_x(p_i) = \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(B))$. On doit montrer que*

$\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Diamond B \iff \langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \vDash \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(B))$ *pour chaque g telle que $g(x) = w$.*

L'hypothèse d'induction est

a) $\langle \mathcal{M}, v\rangle \vDash C \iff \langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, h\rangle \vDash St_y(B)$ *pour chaque v, formule C moins complexe que $\Diamond B$ et assignation h telle que $h(y) = v$.*
Supposons que

b) $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Diamond B$
Donc

c) $\langle \mathcal{M}, v\rangle \vDash B$ *pour quelque v tel que $R(w, v)$.*
Soit g une assignation telle que $g(x) = w$. On doit montrer que

d) $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \vDash \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(B))$.
Pour montrer ce point, il faut trouver $t \in W$ tel que

e) $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g(y/t)\rangle \vDash \underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(B)$
En fait le t que nous cherchons est v. Il suffit de montrer que

f) $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g(y/v)\rangle \vDash \underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(B)$

Pour cela, il faut montrer que

1. $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g(y/v)\rangle \models \underline{\underline{R}}(x,y)$
   et
2. $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g(y/v)\rangle \models St_y(B)$

– *Pour montrer 1), nous observons que*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g(y/v)\rangle \models \underline{\underline{R}}(x,y) &\iff \langle x^{\mathcal{M}^{\mathrm{FO}},g(y/v)}, y^{\mathcal{M}^{\mathrm{FO}},g(y/v)}\rangle \in I(\underline{\underline{R}})\\ &\iff \langle w,v\rangle \in I(\underline{\underline{R}})\\ &\iff R(w,v)\end{aligned}$$

Par c), on a $R(w,v)$, donc 1) est démontré.

– *Pour montrer 2), on observe que $g(y/v)$ est une assignation telle que $g(y/v)(y) = v$. Donc par l'hypothèse d'induction on a*

$$\langle \mathcal{M}, v\rangle \models B \iff \langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g(y/v)\rangle \models St_y(B)$$

Par c), $\langle \mathcal{M}, v\rangle \models B$, donc $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g(y/v)\rangle \models St_y(B)$

Exercice 8 *On vient de démontrer que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \models \Diamond B$ impliquait $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \models \exists y(\underline{\underline{R}}(x,y) \wedge St_y(B))$ pour chaque g telle que $g(x) = w$. A vous de démontrer l'autre sens, c'est-à-dire de supposer que $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \models \exists y(\underline{\underline{R}}(x,y) \wedge St_y(B))$ pour chaque g telle que $g(x) = w$ et d'obtenir que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \models \Diamond B$.*