# Exercices Histoire de la Logique

ClÃ©ment Aubert

21 décembre 2008

## Table des matières

## 1 Exercices en logique modale propositionnelle

### 1.1 Rappels

Le langage de la logique modale propositionnelle est donnée par les clauses suivantes :

-symboles atomiques, $p, q$,...etc.

- Si $A$ et $B$ sont des formules, alors $A \vee B$, $A \wedge B$ , $A \rightarrow B$, et $\neg A$ sont des formules aussi.

- Si $A$ est une formule, alors $\Box A$ (il est necessaire que $A$) et $\Diamond A$ (il est possible que $A$) sont des formules aussi.

Un modele $M = (W, P)$ consiste d'un ensemble non-vide $W$ de mondes possibles et une fonction $P$ qui

associe avec chaque symbol atomique $p$ un ensemble $P(p)$ de mondes possibles, $P(p) \subseteq W$ :

- On definit la relation $M, w \vDash A$, $A$ est vraie dans le monde $w$ du modele $M$ :
- $M, w \vDash p_i \iff w \in P(p_i)$
- $M, w \vDash \neg A \iff M, w \nvDash A$
- $M, w \vDash A \vee B \iff M, w \vDash A$ ou $M, w \vDash B$
- $M, w \vDash A \wedge B \iff M, w \vDash A$ et $M, w \vDash B$
- $M, w \vDash A \rightarrow B \iff M, w \nvDash A$ ou $M, w \vDash B$ (ou : Si $M, w \vDash A$ alors $M, w \vDash B$)
- $M, w \vDash \Box A \iff \forall w' \in W : M, w' \vDash A$
- $M, w \vDash \Diamond A \iff \exists w' \in W : M, w' \vDash A$

$A$ est vraie dans le modele $M$, $M \vDash A$, si $M, w \vDash A$ pour chaque monde $w$ dans $W$.

A est (logiquement) valide, $\vDash A$, si $M \vDash A$ pour chaque modele $M$.

### 1.2 Exercice 1

Prouvez les verites logiques suivantes :

- $\vDash \Box A \rightarrow \Diamond A$
- $\vDash \Box A \rightarrow \Box\Box A$
- $\vDash A \rightarrow \Box\Diamond A$

– $\vDash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

Solution pour $\vDash \Box A \rightarrow \Diamond A$ .

Soit $M = (W, P)$ et $w$ un monde dans $W$. On applique la clause

$M, w \vDash A \rightarrow B \Longleftrightarrow$ Si $M, w \vDash A$ alors $M, w \vDash B$

Supposons que $M, w \vDash \Box A$. Donc, par la clause pour $\Box A$ : $M, w' \vDash A$, pour chaque $w'$ dans $W$.

En particulier, $M, w' \vDash A$, pour au moins un $w'$ dans $W$.

Donc, par la clause pour $\Diamond A$ : $M, w \vDash \Diamond A$.

Solution pour

# 2 Exercices sur le Systeme de Carnap

## 2.1 Exercice 1

En vous placant dans le systÃ¨me de Carnap, en vous dotant d'un ou de plusieurs Ã©tats descriptifs $S$ et d'assignation(s) $g$, dÃ©montrez les vÃ©ritÃ©s logiques suivantes :

1. $\vDash \Box A \leftrightarrow \vDash A$.
2. $\vDash t = t$.
3. $\nvDash \forall x \forall y (x = y \rightarrow \Box(x = y))$
4. $\nvDash \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \Box(x \neq y))$

Les points 3 et 4 indiquent que la nÃ©cessitÃ© logique n'est pas la nÃ©cessitÃ© analytique. On peut les dÃ©montrer Ã  l'aide de contre-exemples : prenez des cas ou $x = y$ et pourtant il n'est pas obligatoire que $x$ soit Ã©gal Ã  $y$, c'est Ã  dire qu'il existe des Ã©tats $S$ oÃ¹ Ã§a n'est pas le cas.

# 3 Exercices sur le SystÃ¨me de Kripke, $S5$

## 3.1 Rappels

### 3.1.1 Structure

Une structure dans cette logique se presente sous la forme $S = (W, D, R, E, w_0)$, avec :

- $W \neq \emptyset$
- $D$ est un ensemble non-vide d'individus.
- $R$ est une relation binaire sur $W$ : $R \subseteq W^2$. Quand on´ecrit $wRv$, on veut dire : $v$ est accessible de $w$.
- $E(w)$ est la collection des individus qui existent dans $w$ : $E(w) \subseteq D$.
- $w_0$ est le monde actuel, il appartient a $W$.

### 3.1.2 Modele

Un modÃ¨le se prÃ©sente sous la forme $M = (S, I)$, avec $S$ une structure dÃ©finie comme prÃ©cÃ©demment, et $I$ une fonction d'interprÃ©tation.

$I$ assigne Ã  chaque symbole de prÃ©dicat et a chaque monde possible $w$ une dÃ©notation : $I(P, w) \subseteq E(w)^n$, $n$ Ã©tant l'aritÃ© du prÃ©dicat $P$, et

$I$assigne a chaque constante individuelle $c$, une designation $I(c) \in D$.[1]
On associe Ã  un modÃ¨le une assignation, notÃ©e $g$ par exemple, qui renvoit pour chaque variable un individu de $D$. Une assignation dÃ©pend du modÃ¨le, et en aucun cas du monde considÃ©rÃ©.
On a ainsi, pour un terme $t$ : $t^{M,g} = \begin{cases} I(c) & \text{si } t \text{ est } c \\ g(x) & \text{si } t \text{ est } x \end{cases}$ .On intreprÃ¨te donc $t$ avec $I$ ou $g$ en fonction du fait que ce soit une constante ou une variable.
Pour une assignation $g$ et un individu $a$ dans $D$, $g(x/a)$ est l'assignation qui est identique Ã  $g$ pour toutes les variables $y \neq x$, et $g(x/a)(x) = a$.
Plus exactement : $\begin{cases} g(x/a)(y) & = g(y) \text{ pour chaque } y \neq x \\ g(x/a)(x) & = a \end{cases}$

### 3.1.3 Conditions de vÃ©ritÃ©

On definit la relation $M, w, g \vDash A$ : $A$ est vraie dans le monde $w$ du modÃ¨le $M$, relativement Ã  l'assignation $g$.
- $M, w, g \vDash P(t_1, ..., t_n)$ si et seulement si $(t_1^{M,g}, ..., t_n^{M,g}) \in I(P)$, $n$ Ã©tant l'aritÃ© de $P$.
- $M, w, g \vDash \forall x A$ si et seulement si pour chaque $a \in E(w)$, on a $M, w, g(x/a) \vDash A$
- $M, w, g \vDash \Box A$ si et seulement si pour chaque $v \in W$, si $vRw$, alors $M, v, g \vDash A$
- $A$ est vraie en $M$ relativement Ã  $g$ : $M, g \vDash A$ si et seulement si $M, w_0, g \vDash A$
- $A$ est vraie dans $M$, $M \vDash A$, si $M, g \vDash A$ pour chaque assignation $g$.
- $A$ est vraie dans la structure modale $S$, $S \vDash A$, si $A$ est vraie dans chaque modÃ¨le $M = (S, I)$
- Soit $K$ une classe de structures modales. $A$ est valide dans $K$ si et seulement si $A$ est vraie dans chaque structure $S$ de $K$.

## 3.2 Exercice 1 : Les formules de Barcan

Les formules de Barcan sont les suivantes :
- $\phi = \forall x \Box A(x) \to \Box \forall x A(x)$
- $\psi = \Box \forall x A(x) \to \forall x \Box A(x)$

1. Montrez que les formules de Barcan ne sont pas valides dans la classe de structures $S5$ de Kripke. C'est-Ã -dire trouvez des structures $S$ et $S'$ telles que $S \nvDash \phi$ et $S' \nvDash \psi$.
2. Quelles sont les libertÃ©s que l'on pourrait prendre par rapport aux rÃ¨gles de $S5$ pour rendre $\phi$ et $\psi$ valides dans la classe des structures $S5$ de Kripke ?

Solution pour (1).
Soit $M = (S, I)$, avec $S = (W, D, R, E, w_0)$, 0u :
-$W = \{w_0, w\}$
-$D = \{a, b\}$
-$w_0 R w$
- $E(w_0) = \{a\}, E(w) = \{a, b\}$
On specifie maintenant $I$ :

[1]Il s'agit lÃ  d'un choix philosophique fort : une constante est un dÃ©signateur rigide, qui ne dÃ©pend pas du monde considÃ©rÃ©. Paul existe dans tous les mondes possibles. Ce n'est pas l'option qui a Ã©tÃ© retenue par Montague par exemple : dans son systÃ¨me, $I$ dÃ©pend Ã©galement du monde considÃ©rÃ©.

- $I(P, w_0) = \{a\}$, $I(P, w) = \{a\}$

On va montrer que pour chaque assignation $g$ on a :

$M, w_0, g \nvDash \forall x \Box P(x) \to \Box \forall x P(x)$.

On a $M, w_0, g \vDash \forall x \Box P(x)$, car (i) $M, w_0, g(x/a) \vDash \Box P(x)$.

Afin de montrer (i) il faut montrer que $M, w, g(x/a) \vDash P(x)$, ce qui revient à montrer que $x^{M,g(x/a)} \in I(P, w)$.

Mais $x^{M,g(x/a)} = a$ et $I(P, w) = \{a\}$.

De l'autre cote, on observe que $M, w_0, g \nvDash \Box \forall x P(x)$. Cela se voit de la maniere suivante :

Supposons que $M, w_0, g \vDash \Box \forall x P(x)$. Alors $M, v, g \vDash \forall x P(x)$ pour chaque $v$ accessible de $w_0$.

Comme $w$ est accessible de $w_0$ on doit avoir $M, w, g \vDash \forall x P(x)$.

En d'autres termes, on doit avoir

$M, w, g(x, a) \vDash P(x)$

et

$M, w, g(x, b) \vDash P(x)$

Cela revient a

$x^{M,g(x/a)} \in I(P, w)$, donc $a \in \{a\}$

$x^{M,g(x/b)} \in I(P, w)$, donc $b \in \{a\}$

Mais la derniere assertion est fausse.

On a finit de montrer que

$M, w_0, g \nvDash \forall x \Box P(x) \to \Box \forall x P(x)$.

## 3.3 Exercice 2 : *Necessity of identicals*

Montrez la validitÃ© des formules suivantes en $S5$ :

1. $\forall x \forall y (x = y \to \Box(x = y))$
2. $c = d \to \Box(c = d)$

Pour toute question plus technique, adressez-vous Ã  M. Sandu : sandu@mappi.helsinki.fi