Exercices Histoire de la Logique

Clément Aubert

29 octobre 2008

Table des matières

1 Exercices en logique modale propositionnelle **1**
1.1 Rappels 1
1.2 Exercice 1 2

2 Exercices sur le Système de Carnap **2**
2.1 Exercice 1 2

3 Exercices sur le Système de Kripke, $S5$ **2**
3.1 Rappels 2
3.1.1 Structure 2
3.1.2 Modèle 2
3.1.3 Conditions de vérité 3
3.2 Exercice 1 : Les formules de Barcan 3
3.3 Exercice 2 : *Necessity of identicals* 3

1 Exercices en logique modale propositionnelle

1.1 Rappels

On se pose une fois pour toutes $\mathcal{L}$ notre langage contenant des atomes $p_1, p_2, ..., p', ..., q_0 ...$. Les modèles sont de la forme $M = (W, P)$, avec $W = w_1, ..., w_2, ..., v, ...$ et $W \neq \emptyset$[1]. P est une fonction qui assigne à chaque atome de $\mathcal{L}$ une collection de mondes possibles : $P : p_1, p_2, ... \rightarrow \mathcal{P}(W)$[2]. La logique employée est la logique modale propositionnelle, c'est-à-dire la logique propositionnelle enrichie des connecteur $\Box$ (la nécessité) et $\Diamond$ (la possibilité).
Les conditions de vérité sont définies comme suit :

- $M, w \vDash p_i \Longleftrightarrow w \in P(p_i)$
- $M, w \vDash \neg A \Longleftrightarrow M, w \nvDash A$
- $M, w \vDash A \vee B \Longleftrightarrow M, w \vDash A$ ou $M, w \vDash B$
- $M, w \vDash A \wedge B \Longleftrightarrow M, w \vDash A$ et $M, w \vDash B$
- $M, w \vDash A \rightarrow B \Longleftrightarrow M, w \nvDash A$ ou $M, w \vDash B$
- $M, w \vDash A \leftrightarrow B \Longleftrightarrow M, w \vDash A$ et $M, w \vDash B$, ou si $M, w \nvDash A$ et $M, w \nvDash B$
- $M, w \vDash \Box A \Longleftrightarrow \forall w' \in W : M, w' \vDash A$

[1] C'est-à-dire que W contient au moins un élément, un monde.
[2] $\mathcal{P}$ est la fonction classique qui associe à un ensemble un sous-ensemble de celui-ci. On a donc $\mathcal{P}(W) \subseteq W$.

– $M, w \vDash \Diamond A \Longleftrightarrow \exists w' \in W : M, w' \vDash A$

1.2 Exercice 1

Prouvez les vérités logiques suivantes :
– $\vDash \Box A \rightarrow \Diamond A$
– $\vDash \Box A \rightarrow \Box\Box A$
– $\vDash A \rightarrow \Box\Diamond A$
– $\vDash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

2 Exercices sur le Système de Carnap

2.1 Exercice 1

En vous placant dans le système de Carnap, en vous dotant d'un ou de plusieurs états descriptifs S et d'assignation(s) g, démontrez les vérités logiques suivantes :

1. $\vDash \Box A \leftrightarrow \vDash A$.
2. $\vDash t = t$.
3. $\nvDash \forall x \forall y (x = y \rightarrow \Box(x = y))$
4. $\nvDash \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \Box(x \neq y))$

Les points 3 et 4 indiquent que la nécessité logique n'est pas la nécessité analytique. On peut les démontrer à l'aide de contre-exemples : prenez des cas ou $x = y$ et pourtant il n'est pas obligatoire que x soit égal à y, c'est à dire qu'il existe des états S où ça n'est pas le cas.

3 Exercices sur le Système de Kripke, $S5$

3.1 Rappels

3.1.1 Structure

Une structure dans ce système se présente sous la forme $S = (W, D, R, E, w_0)$, avec :
– $W \neq \emptyset$ et $W = w_0, w_1, .., v, ..., v', ...$
– D le domaine fixe d'individus, composé d'un nombre infini de variables $x, ..., y, ..$ et de constantes $c, ..., d, ...$
– R est une relation binaire définie sur W^2 : $R \subseteq W^2$. Par exemple, deux mondes w et v appartenant à W sont en relation : wRv.
– $E(w)$ est la collection des individus qui existent dans w : $E(w) \subseteq D$.
– w_0 est le monde actuel, il appartient à W.

Remarque : Chaque individu de D existe dans au moins un monde quelconque. Autrement dit, D est la réunion des $E(v)$ pour chaque $v \in W$: $D = \bigcup_{v \in W} E(v)$.

3.1.2 Modèle

Un modèle se présente sous la forme $M = (S, I)$, avec S une structure définie comme précédemment, et I une fonction d'interprétation. I assigne à chaque symbole de prédicat et à chaque constante une extension, une dénotation : $I(P) \subseteq D^n$, n étant l'arité du prédicat P, et $I(c) \in D$.[3]

On associe à un modèle une assignation, notée g par exemple, qui renvoit pour chaque variable un individu de D. Une assignation dépend du modèle, et en aucun cas du monde considéré.

On a ainsi, pour un terme t : $t^{M,g} = \begin{cases} I(c) & \text{si t est c} \\ g(x) & \text{si t est x} \end{cases}$ .On intreprète donc t avec I ou g en fonction du fait que ce soit une constante ou une variable.

Pour une assignation g et un individu a dans D, $g(x/a)$ est l'assignation qui est identique à g pour toutes les variables $y \neq x$, et $g(x/a)(x) = a$.

En d'autres termes : $\begin{cases} g(x/a)(y) & = g(y) \text{ pour chaque } y \neq x \\ g(x/a)(x) & = a \end{cases}$

3.1.3 Conditions de vérité

- $M, w, g \vDash A$: A est vraie dans le modèle M, en fonction du monde w et relativement à l'assignation g.
- $M, w, g \vDash P(t_1, ..., t_n)$ si et seulement si $(t_1^{M,g}, ..., t_n^{M,g}) \in I(P)$, n étant l'arité de P.
- $M, w, g \vDash \forall x A$ si et seulement si pour chaque $a \in E(w)$, on a $M, w, g(x/a) \vDash A$
- $M, w, g \vDash \Box A$ si et seulement si pour chaque $v \in W$, si vRw, alors $M, v, g \vDash A$
- A est vraie en M relativement à g : $M, g \vDash A$ si et seulement si $M, w_0, g \vDash A$
- A est vraie dans M si $M, g \vDash A$ pour chaque assignation
- A est vraie dans la structure modale S, $S \vDash A$ si et seulement si A est vraie dans chaque modèle $M = (S, I)$
- Soit K une classe de structures modales. A est valide dans K si et seulement si A est vraie dans chaque structure S de K.
- $M, w, g \vDash \Box A$ si et seulement si pour chaque $v \in W$, $M, v, g \vDash A$.[4]

3.2 Exercice 1 : Les formules de Barcan

Les formules de Barcan sont les suivantes :
- $\phi = \forall x \Box A(x) \rightarrow \Box \forall x A(x)$
- $\psi = \Box \forall x A(x) \rightarrow \forall x \Box A(x)$

1. Montrez que les formules de Barcan ne sont pas valides dans la classe de structures $S5$ de Kripke. C'est-à-dire trouvez des structures S et S' telles que $S \nvDash \phi$ et $S' \nvDash \psi$.
2. Quelles sont les libertés que l'on pourrait prendre par rapport aux règles de $S5$ pour rendre ϕ et ψ valides dans la classe des structures $S5$ de Kripke ?

3.3 Exercice 2 : *Necessity of identicals*

Montrez la validité des formules suivantes en $S5$:

[3]Il s'agit là d'un choix philosophique fort : une constante est un désignateur rigide, qui ne dépend pas du monde considéré. Paul existe dans tous les mondes possibles. Ce n'est pas l'option qui a été retenue par Montague par exemple : dans son système, I dépend également du monde considéré.

[4]En fait, rigoureusement, $M, w, g \vDash \Box A$ est vraie si et seulement si chaque monde $v \in W$ en relation par R avec w (donc tel que vRw) vérifie A. Seulement, puisque nous sommes en $S5$, tous les mondes sont en relation avec tous les mondes par R : la relation d'accessibilité est universelle.

1. $\forall x \forall y(x = y \rightarrow \Box(x = y))$
2. $c = d \rightarrow \Box(c = d)$

Il est possible que ce document contienne des erreurs ou des coquilles. Merci de me le signaler : aubert.clement@gmail.com
Pour toute question plus technique, adressez-vous à M. Sandu : sandu@mappi.helsinki.fi