Les arguments *slingshot*

14 décembre 2008

Table des matières

1 Présentation technique de Ix

1.1 Syntaxe

On étend les langages du premier ordre avec des descriptions définies. On veut pouvoir traiter des expressions comme :

Le père de Bush
Le roi de France

On introduit un nouveau symbole, ix pour l'expression « le ». Il se combine avec des prédicats pour former des noms :

le chat
le roi

Du point de vue formel, ix se combine avec des formules $A(x)$ pour former un terme :

$$ixA(x)$$

qui signifie : le seul x qui a la propriété A.

1.1.1 Exemple

On symbolise ainsi l'expression *Le fermier qui a sauvé quelqu'un* par :

$$ix(F(x) \wedge \exists y S(x,y))$$

1.1.2 Extension de la définition de terme

On obtient alors une extension du langage du premier ordre, car il définit ainsi les termes :
- chaque constante individuelle est un terme
- chaque variable est un terme
- si A est une formule, alors ixA est un terme

1.2 Sémantique

Du point de vue sémantique, il y a quelques complications. Supposons que K symbolise « le roi de »et a « les U.S.A. ». La question est quelle est l'interprétation de

$$ixKxa$$

Il y a deux cas qui posent problème : si il n'y a pas d'individu dans l'univers qui satisfait Kxa et si plusieurs objets satisfont Kxa.
Pour le premier cas, on tranche en affirmant que chaque énoncé atomique qui contient une description définie qui est vide est fausse. Une façon de le dire est d'inclure dans chaque modèle une entité qui est l'objet vide, en dehors de l'univers.

On a alors les modèles $M = (D, I, e)$:
- D est l'univers du modèle
- I est la fonction d'interprétation qui associe à chaque symbole R une relation $I(R)$ dans D^n, n étant l'arité de R.
- $I(c) \in D$ pour chaque constante individuelle c.
- $e \notin D$.

On ajoute une assignation g pour les variables. La valeur sémantique d'un terme t dans M selon g, $t^{M,g}$, est définie comme suit :

$$t^{M,g} = \begin{cases} g(x) & \text{si } t \text{ est la variable } x \\ I(c) & \text{si } t \text{ est la constante } c \\ \text{l'unique } w \in D & \text{ssi } t \text{ est } ixA \text{ tel que } \langle M, g(x/a)\rangle \vDash A \\ e & \text{si il n'y a pas d'objet unique dans } D \text{ qui satisfait la clause précédente.} \end{cases}$$

Plus simplement : la désignation de ixA dans M est l'unique objet qui satisfait A si il y a un tel objet, autrement elle est e.
Autrement dit, chaque fois qu'on a un seul individu u qui satisfait

$$\langle M, g(x/u)\rangle \vDash A$$

on a $(ixA)^{M,g}$ est l'individu u.

1.2.1 Exemple

Soit $M = \langle D, V, e\rangle$ un modèle adapté à un langage $\mathcal{L}$ du premier ordre qui contient une constante individuelle 1 et un symbole de prédicat unaire (à une place) P.
$D = \{0, 1, 2\}$ $\quad V(1) = 1$ $\quad V(P) = \{1, 2\}$ Soit g une assignation arbitraire, on a alors :

$$\langle M, g(x/1)\rangle \vDash x = 1$$
$$\langle M, g(x/1)\rangle \vDash P(x)$$

Etant donné que :

$$\langle M, g(x/1)\rangle \vDash P(x) \text{ et } \langle M, g(x/2)\rangle \vDash P(x),$$

on a :

$$(ixP(x))^{M,g} \text{ est } e$$

Mais 1 est le un seul individu à satisfaire

$$\langle M, g(x/1)\rangle \vDash (x = 1 \wedge P(x))$$

Donc : $(ix(x = 1 \wedge P(x)))^{M,g}$ est 1.

1.3 Equivalence logique de $A(a)$ et $a = ix(x = a \wedge A(x))$

Nous allons maintenant montrer que les formules $A(a)$ et $a = ix(x = a \wedge A(x))$ sont logiquement équivalentes.
Soit g une assignation arbitraire.

1.3.1 Démonstration de $A(a) \rightarrow a = ix(x = a \wedge A(x))$

Supposons $\langle M, g\rangle \vDash A(a)$.
Dans la logique du premier ordre on a le théorème suivant :

$$\langle M, g\rangle \vDash A(a) \iff \langle M, g(x/I(a))\rangle \vDash A(x)$$

Donc $\langle M, g(x/I(a))\rangle \vDash A(x)$
Puisque $I(a)$ est le seul individu à satisfaire cette formule, on a :

$$[ix(x = a \wedge A(x)]^{M,g} \text{ est } I(a).$$

Mais dans ce cas on a aussi :

$$\langle M, g\rangle \vDash a = ix(x = a \wedge A(x))$$

1.3.2 Démonstration de $a = ix(x = a \wedge A(x)) \rightarrow A(a)$

On suppose que $\langle M, g\rangle \vDash a = ix(x = a \wedge A(x))$.
Donc $[ix(x = a \wedge A(x)]^{M,g}$ est $I(a)$.
Donc $\langle M, g(x/I(a))\rangle \vDash x = a \wedge A(a)$, ce qui implique

$$\langle M, g(x/I(a))\rangle \vDash A(x)$$

Et par le théorème mentionné plus haut on a :

$$\langle M, g\rangle \vDash A(a).$$

1.4 Corolaire de l'équivalence logique

Soient $A(a)$ et $B(a)$ deux formules qui contiennent la constante individuelle a.
Si $A(a)$ et $B(a)$ sont vraies, alors les termes

$$ix(x = a \wedge A(x)) \text{ et } ix(x = a \wedge B(x))$$

désignent le même individu.

1.4.1 Demonstration

On cherche à démonstrer que si $\langle M, g\rangle \vDash A(a)$ et $\langle M, g\rangle \vDash B(a)$, alors $[ix(x = a) \wedge A(x)]^{M,g} = [ix(x = a) \wedge B(x)]^{M,g}$.
On suppose que

1. $\langle M, g\rangle \vDash A(a)$
2. $\langle M, g\rangle \vDash B(a)$
   Par le théorème mentionné on a alors
3. $\langle M, g(x/I(a))\rangle \vDash A(x)$
4. $\langle M, g(x/I(a))\rangle \vDash B(x)$
   Donc
5. $\langle M, g(x/I(a))\rangle \vDash x = a \wedge A(x)$
6. $\langle M, g(x/I(a))\rangle \vDash x = a \wedge B(x)$
   En effet, $I(a)$ est le seul individu qui satisfait 5. et 6. .

Donc : $[ix(x = a) \wedge A(x)]^{M,g} = I(a) = [ix(x = a) \wedge B(x)]^{M,g}$.

2 Le *slingshot* de Gödel

2.1 Les arguments employés

Le *slingshot* de Gödel emploie les arguments suivants :
- *SCR*[1] : Si l'énoncé A correspond au fait f alors l'énoncé A' obtenu de A par la substitution d'un terme coréférentiel correspond aussi au fait f.
- *SLE*[2] : Deux énoncés logiquement équivalents correspondent au même fait.

On a vu que les deux faits suivants sont aussi valides :

[1] En français : Substitution des Termes Coréférentiels
[2] En français : Substitution des Equivalences Logiques

– *(F_1)* : $A(a)$ et $a = ix(x = a \wedge A(x))$ sont logiquement équivalents pour tout énoncé A qui contient la constante a.
– *(F_2)* : Si $A(a)$ et $B(a)$ sont vrais, alors $ix(x = a \wedge A(x))$ et $ix(x = a \wedge B(x))$ désignent le même individu.

2.2 Le *slingshot*

Supposons que $F(a)$, $a \neq b$ et $G(b)$ sont trois énoncés vrais.

1. $F(a)$ correspond au fait f_1. Prémisse
2. $a \neq b$ correspond au fait f_2. Prémisse
3. $G(b)$ correspond au fait f_3. Prémisse
4. $a = ix(x = a \wedge F(x))$ correspond au fait f_1. (1, SLE)
5. $a = ix(x = a \wedge x \neq b)$ correspond au fait f_2. (2, SLE)
6. $a = ix(x = a \wedge x \neq b)$ correspond au fait f_1. (5, 4, SCR)

Donc, par 5. et 6., $f_1 = f_2$.
De la même façon, on démontre que $f_2 = f_3$.

3 L'argument de Church

3.1 Les outils employés

On emploie une extension d'un langage du premier ordre avec $\{x = A(x)\}$ qui dénote la classe des entités qui ont la propriété A.
On présuppose :
– *(SCR)* : la substitution des termes coréférentiels, défini comme précédemment.
– *(SLE)* : deux énoncés qui sont logiquement équivalents désignent le même fait, la même proposition.

Deux observations sont essentielles dans la preuve :
– *O1* : A et $\{x : x = x \wedge A\} = \{x : x = x\}$ sont logiquement équivalents.
– *O2* : chaque fois que les énoncés A et B sont vrais, les descriptions $\{x : x = x \wedge A\}$ et $\{x : x = x \wedge B\}$ définissent la même classe.

3.1.1 Rappel de la notion de classe.

Afin de montrer *O1*, on rappelle quelques faits élémentaires :
– $\{x : x > 0\}$ définit (dans l'univers des nombres naturels) la classe $\{1, 2, 3, 4, ...\}$.
– $\{x : x = 1\}$ designe $\{1\}$.
– $\{x : x \neq x\}$ désigne $\emptyset$.
– $\{x : 2 = 2\}$ désigne la classe universelle (tout l'univers).

Donc $\{x : x = x\}$ et $\{x : 2 = 2\}$ désignent la même classe.

3.1.2 Démonstration de *O1*

Supposons que A soit un énoncé vrai. Alors le terme $\{x : x = x \wedge A\}$ désigne l'univers, c'est-à-dire la même classe que $\{x : x = x\}$. Donc :

$$\{x : x = x \wedge A\} = \{x : x = x\} \tag{+}$$

Dans l'autre direction, supposons que (+) soit vrai, il est évident que A doit être vraie !

3.1.3 Démonstration de *O2*

Comme A est vraie, $\{x : x = x \wedge A\}$ désigne la classe universelle, et il en est de même pour $\{x : x = x \wedge B\}$.

3.2 L'argument du *slingshot* de Church et Davidson

1.	A	Prémisse
2.	B	Prémisse
3.	A correspond au fait f_1.	Prémisse
4.	$\{x : x = x \wedge A\} = \{x : x = x\}$ correspond au fait f_1.	(3, SLE)
5.	$\{x : x = x \wedge B\} = \{x : x = x\}$ correspond au fait f_1.	(4, SCR)
6.	B correspond au fait f_1.	(5, 2, SLE)

Donc par la conclusion A et B correspondent au même fait.

4 Quine

4.1 Les outils de Quine

On définit δp :
$\delta p : ix[(x = 1 \wedge p) \vee (x = 0 \wedge \neg p)]$

4.1.1 L'observation 5 et sa démonstration

O5 : p et δp sont logiquement équivalents.

La vérité de p implique celle de δp Supposons que p soit vrai. Donc le disjoint

$$(x = 1 \wedge p)$$

est satisfait pour un seul objet, la dénotation de 1. Donc $ix[(x = 1 \wedge p) \vee (x = 0 \wedge \neg p)]$ est vrai.

La vérité de δp implique celle de p Supposons que $\delta p = 1$, alors la dénotation de

$$ix[(x = 1 \wedge p) \vee (x = 0 \wedge \neg p)]$$

doit être la dénotation de 1. Mais dans ce cas, il doit y avoir un seul objet qui satisfait

$$x = 1 \wedge p$$

et donc p doit être vrai.

4.1.2 L'observation 6 et sa démonstration

O6 : chaque fois que A et B sont vrais, alors δA et δB désignent le même individu.

Cela se voit de la façon suivante :
Supposons que A et B soient vraies.
$\delta A =_{\text{def}} ix[(x = 1 \land A) \lor (x = 0 \land \neg A)]$ (a)
$\delta B =_{\text{def}} ix[(x = 1 \land B) \lor (x = 0 \land \neg B)]$ (b)
Comme A et B sont vrais, le disjoint $(x = 1 \land A)$ est satisfait par exactement un seul individu (la dénotation de 1). La même chose vaut pour $(x = 1 \land B)$.
Donc la dénotation de (a) est identique à celle de (b) : elles sont toutes les deux la dénotation de 1.

4.2 Le *slingshot* de Quine

1. A Prémisse
2. B Prémisse
3. $\Box A$ Prémisse
4. $\Box(\delta A = 1)$ (3, SLE)
5. $\delta A = \delta B$ (1, 2, O6)
6. $\Box(\delta B = 1)$ (4, 5)
7. $\Box B$ (6, SLE)

On constate que l'argument de Quine prouve en fait que $\Box$ est un opérateur <u>extentionnel</u> : à partir de la prémisse $\Box A$ et du fait que A et B soient matériellement équivalents, on en conclut $\Box B$.