Table des matières

Chapitre 1

La Logique modale propositionnelle

L'étude d'une logique se divise depuis le début du siècle en deux parties rigoureusement différentes :

- La syntaxe, qui se contente de vérifier que les énoncés sont formulés dans le respect des règles du langage choisi (ici, un langage propositionnel enrichi de connecteurs modaux).
- La sémantique, elle, étudie les valeurs de vérité des énoncés ainsi formés.

1.1 La syntaxe de la logique propositionnelle

Le langage que l'on se donne est un langage du premier ordre. Il est constitué :

- d'atomes propositionnels, notés q, q', p_1, p_2, etc.
- de connecteurs :
  - la négation, notée $\neg$
  - la disjonction, notée $\vee$
  - la conjonction, notée $\wedge$
  - l'implication, notée $\rightarrow$
  - l'équivalence, notée $\leftrightarrow$
- d'opérateurs modaux, au nombre de deux :
  - la nécessité, notée $\Box$
  - la possibilité, notée $\Diamond$

On note $\mathcal{L}$ ce langage, il varie en fonction des atomes que l'on se donne.

Remarque

$\Diamond A := \neg\Box\neg A$

C'est-à-dire qu'*il est possible que A* équivaut à *il n'est pas obligatoire que A ne soit pas le cas*.

1.2 La sémantique de la logique propositionnelle

Il s'agit ici de se demander dans quelles cas une proposition A du langage $\mathcal{L}$ est $vraie$ ou $fausse$. Cette valeur de vérité de la proposition dépends des valeurs des éléments qui la composent.

1.2.1 Les valeurs de vérité

A. Tarski a le premier défini une table des valeurs de vérités (cf. fig. 1.1).
V signifie que la proposition est $vraie$, F qu'elle est $fausse$.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

FIG. 1.1 – La table de vérité

Les deux premières colonnes dans la fig. 1.1 *distribuent* les différentes valeurs de vérité possibles entre A et B, les autres colonnes sont des règles à apprendre et à comprendre.

De même, on a :

A	$\Diamond A$	$\Box A$
V	V	$?$
F	$?$	F

FIG. 1.2 – Les cas particuliers de $\Diamond$ et de $\Box$

Les opérateurs modaux n'ont pas toutes leurs valeurs de vérité définies par le simple fait que A soit $vraie$ ou $fausse$ dans un seul cas, dans un seul monde, comme on le verra au chapitre suivant.

- Si A est $vraie$, on peut en conclure que $\Diamond A$ est $vraie$.
- Mais si A est $fausse$, on ne peut pas en conclure que A n'est pas possible.
- Si A est $fausse$, on en déduit que $\Box A$ est $fausse$.
- Mais si A est $vraie$, on ne peut pas en conclure que A est obligatoire.

Pour avoir l'ensemble des valeurs de vérité des opérateurs $\Diamond$ et $\Box$, il faut traiter l'ensemble des mondes possibles, ce qui est rendu possible par la construction d'un modèle du langage.

1.2.2 Les modèles du langage

Définition

Un modèle M du langage $\mathcal{L}$ s'écrit toujours de la forme $M = \langle W, P \rangle$, avec :

- W : la collection des mondes possibles.

– P : la fonction qui associe à chaque atome propositionnel de $\mathcal{L}$ les mondes dans lesquels il est présent.

Remarques

-$W \neq \emptyset$, c'est-à-dire que W contient toujours au moins un monde.
-Formellement : $P : \{p_0, p_1, ...\} \to \mathcal{P}(W)$. Soit : P est la fonction qui associe à un ensemble d'atomes propositionnels un ensemble de mondes de W. La fonction notée $\mathcal{P}$ associe l'ensemble W des mondes à une partie d'entre eux.

Les symboles $\in, \forall, \exists$

$w \in P(p_i)$ signifie que le monde w fait partie de l'ensemble des mondes que renvoit la fonction P appliquée à p_i.
$\forall w' \in W$ signifie : *Pour tout monde w' de W.*
$\exists w' \in W$ signifie : *Pour au moins un monde w' de W.*

La relation $\models$

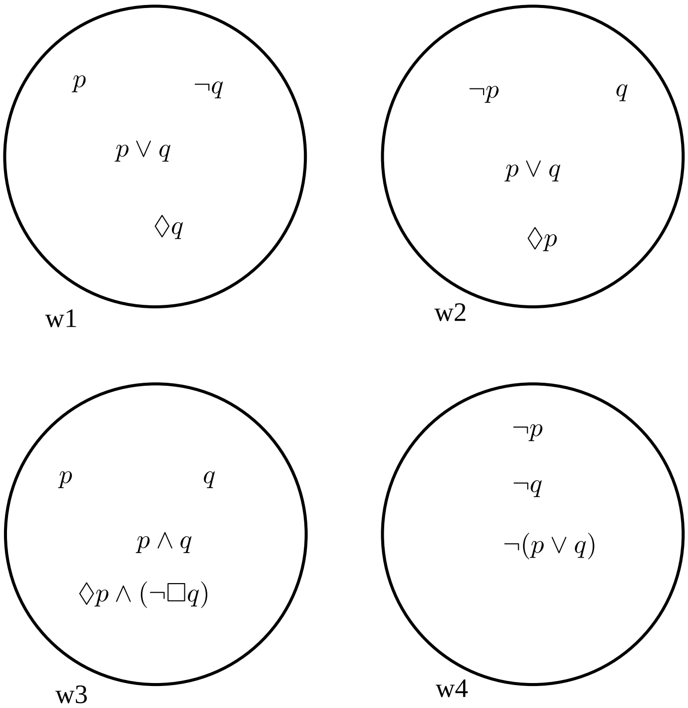
On définit ensuite la relation $M, w \models A$, A est $vraie$ dans le monde w du modèle M, par :

– $M, w \models p_i \iff w \in P(p_i)$
– $M, w \models \neg A \iff M, w \not\models A$
– $M, w \models A \vee B \iff M, w \models A$ ou $M, w \models B$
– $M, w \models A \wedge B \iff M, w \models A$ et $M, w \models B$
– $M, w \models A \to B \iff M, w \not\models A$ ou $M, w \models B$
– $M, w \models A \leftrightarrow B \iff M, w \models A$ et $M, w \models B$, ou si $M, w \not\models A$ et $M, w \not\models B$
– $M, w \models \Box A \iff \forall w' \in W : M, w' \models A$
– $M, w \models \Diamond A \iff \exists w' \in W : M, w' \models A$

Exemple

$\mathcal{L} = p, q.$
$M = (W, P)$, avec : - $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
- $P(p) = \{w_1, w_3\}$
- $P(q) = \{w_2, w_3\}$

On a :
$$\begin{array}{lll} M, w_1 \models p & M, w_1 \not\models q & M, w_1 \not\models p \to q \\ M, w_2 \not\models p & M, w_2 \models q & M, w_2 \models p \vee q \\ M, w_3 \models p & M, w_3 \models q & M, w_3 \models p \wedge q \\ M, w_4 \not\models p & M, w_4 \not\models q & M, w_4 \models p \leftrightarrow q \end{array}$$
Ce que l'on peut interprêter graphiquement ainsi :



Notez bien que les formules représentés dans les mondes w_1, w_2, w_3 et w_4 sont en partie contingentes, elles ne servent que d'illustration : bien d'autres formules sont rendues vraies dans ces mondes.
Ainsi, par exemple, la proposition A :
$A : p \vee q$
Cette proposition est vérifiée dans les mondes w_1, w_2 et w_3, car chacun de ces mondes vérifie p ou q.
On note $\{w \in W : M, w \vDash A\}$ l'ensemble des mondes w de W où A est vérifiée.
Par exemple, $\{w \in W : M, w \vDash \Diamond p\} = W$: la proposition $\Diamond p$ est vérifiée dans l'intégralité des mondes de W.
On peut enfin remarquer que dans cet exemple, les différentes combinaisons de vérité et de fausseté de p et de q sont incarnées par un monde :

p	q	Le monde correspondant
V	V	w_3
V	F	w_1
F	V	w_2
F	F	w_4

La Validité

Soit $M = (W, P)$ un modèle du langage $\mathcal{L}$.
Si on a $M, w \vDash A$ pour chaque monde possible, on dit que A est valide dans le modèle M, et on écrit $M \vDash A$.
Si A n'est pas valide dans les mondes de M, c'est-à-dire s'il existe un monde v de W tel que $M, v \nvDash A$, on écrit $M \nvDash A$.

Enfin, on dit que A est valide et on écrit $\vDash A$ si $M \vDash A$ pour chaque modèle M.

Exemples

- Soit $M = (W, P)$ avec $W = \{w_1, w_2\}$
  $P_(p) = \{w_1, w_2\}$
  $P_(q) = \{w_1\}$.
  On a : - $M, w_1 \vDash p \vee q$
  -$M, w_2 \vDash p \vee q$
  On vérifie donc : $M, W \vDash p \vee q$.
  On peut vérifier qu'on a aussi : $M \vDash \Box p$ et $M \vDash \Box(p \vee q)$
- Le schéma $\Box A \rightarrow A$, où A est n'importe quel énoncé valide, est une formule valide.

Proposition

Si A est valide, alors $\Box A$ est valide aussi.

Démonstration

Soit $M = (W, P)$. Etant donné que A est valide, alors $M, w \vDash A$ pour chaque monde $w \in W$.
Donc $M, w \vDash \Box A$ pour chaque $w \in W$, donc $M \vDash \Box A$.
Comme M est arbitraire, on a $\vDash A$.

Proposition

$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ est valide.

Démonstration

Il faut montrer que pour chaque modèle $M = (W, P)$ on a $M, w \vDash \Box C$, avec $w \in W$ et $C = \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.
Si $M, w \nvDash \Box(A \rightarrow B)$, alors on a $M, w \vDash C$.
Soit $w' \in W$, avec $M, w' \vDash A \rightarrow B$ et $M, w' \vDash A$. On a alors $M, w' \vDash B$ par hypothèse, et $M, w' \vDash \Box B$.
Donc $\vDash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

Exercices

Montrer que les formules suivantes sont valides :
- $\Box A \rightarrow \Diamond A$
- $\Box A \rightarrow A$
- $A \rightarrow \Box\Diamond A$
- $\Box A \rightarrow \Box\Box A$
- $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

Chapitre 2

La Logique du premier ordre

La logique du premier ordre a un pouvoir d'expression plus grand que la logique propositionnelle. On peut formuler des énoncés comme :

Chaque état a un président.

sous la forme

$$\forall x(Etat(x) \rightarrow \exists y \textit{Président}(x, y))$$

2.1 Syntaxe de la logique du premier ordre

On va maintenant construire la logique du premier ordre avec la logique modale pour obtenir la logique modale du premier ordre. On commence par passer en revue les concepts de base de la logique du premier ordre.
Dans la logique propositionnelle on commence avec un ensemble de formules atomiques p_0, p_1, q, q'...
Dans la logique du premier ordre on commence avec un ensemble T de symboles de relations, de fonctions et constantes individuelles. Chaque symbole de relation et de fonction a une arité, un degré, qui correspond au nombre d'arguments qu'il peut prendre. Dans notre exemple, le symbole *président* a le degré 2.
On suppose aussi qu'il y a un nombre infini de variables x, y, x_0, y', ... Les constantes individuelles et les variables vont désigner des individus dans un domaine de discours, un univers. Ce sont des termes. On peut aussi former des termes plus compliqués à l'aide des symboles de fonction.
On a alors : si $t_1, ..., t_n$ sont des termes, et f un symbole de fonction d'arité n, alors $f(t_1, ..., t_n)$ est un terme également.

Les formules atomiques sont de deux formes :

– $P(t_1, ..., t_n)$, avec P un symbole de relation de degré n et $t_1, ..., t_n$ des termes.
– $t_1 = t_2$ avec t_1 et t_2 des termes.

Les formules sont : $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$, mais aussi $\exists x A$ et $\forall x A$.

2.2 Sémantique de la logique du premier ordre

2.2.1 Les structures relationnelles

On interprète le langage du premier ordre dans des structures relationnelles. Supposons, pour le moment, que le langage ne contient pas de symboles de fonction. Une structure relationnelle se compose :

- d'un univers de discours D, qui est un ensemble d'individus. On a toujours $D \neq \emptyset$.
- et d'une fonction d'interprétation I.

Ainsi, $I(c)$ est un élément de D, pour chaque constante individuelle c.
$I(R)$ est une relation telle que pour chaque relation R de degré n, $I(R) \subseteq D^n$.

Exemple : Supposons que le langage ne contienne que le symbole de relation $<$. Soit $M = (D, I)$ une structure où $D = \{1, 2, 3, ...\}$ et $I(<) = \{(n, m) : n, m \in D$, et n est plus petit que $m\}$.
On observe que la structure relationnelle ne donne pas une interprétation aux variables individuelles. Pour cela on a besoin d'une assignation, une fonction g dont les arguments sont des variables individuelles et les valeurs sont des individus dans D.

Une fois qu'on a introduit une structure relationnelle $M = (D, I)$ et une assignation g dans M, on peut définir la dénotation d'un terme t du langage dans M relativement à g :

$$t^{M,g} = \begin{cases} I(c) \text{ si } t \text{ est une constante individuelle } c \\ g(x) \text{ si } t \text{ est une variable individuelle } x \end{cases}$$

On peut maintenant définir la notion de vérité d'une formule dans une structure relativement à une assignation.

On commence par quelques exemples :
Soit $Beau$ un symbole de relation et c une constante individuelle. Soit $M = (D, I)$ un modèle tel que $D = \{Jacques, Pierre\}, I(c) = \{Jacques\}, I(Beau) = \{Jacques\}$.
Intuitivement l'énoncé $Beau(c)$ est vrai dans M si et seulement si $I(c) \in I(Beau)$, c'est-à-dire si et seulement si $Jacques \in \{Jacques\}$, ce qui est le cas.
Pour une assignation g et un individu a dans D, $g(x/a)$ est l'assignation qui est identique à g pour toutes les variables $y \neq x$, et $g(x/a)(x) = a$.
En d'autres termes : $\begin{cases} g(x/a)(y) & = g(y) \text{ pour chaque } y \neq x \\ g(x/a)(x) & = a \end{cases}$

2.2.2 La valeur de vérité des structures

Soient $M = (D, I)$ une structure d'interprétation, avec D l'univers de discours (l'ensemble des individus), I la fonction d'interprétation, qui associe aux constantes du Langage des individus de D. On note $t_1^{M,g}$ l'individu interpretant le terme t_1 selon la structure d'interpretation M et l'assignation g.
$M, g \vDash P(t_1, ..., t_n) \leftrightarrow (t_1^{M,g}, ..., t_n^{M,g}) \in I(P)$
$M, g \vDash \neg A \leftrightarrow M, g \nvDash A$
$M, g \vDash A \vee B \leftrightarrow M, g \vDash A$ et $M, g \vDash B$
$M, g \vDash \exists x A$ si et seulement si il y a un individu $a \in D$ tel que $M, g(x/a) \vDash A$
$M, g \vDash \forall x A$ si et seulement si pour tout individu $a \in D$, $M, g(x/a) \vDash A$

Le cas de la quantification est plus compliqué. Intuitivement la formule $\exists x Beau(x)$ est vraie dans une structure $M = (D, I)$ dans le cas où il y a une personne a telle que a appartienne à la dénotation de $Beau$ dans M.
Et $\forall x Beau(x)$ est vraie dans M exactement quand tous les individus de l'unviers D appartiennent à l'extenion de D.
Mais pour la formule $Beau(x)$, il n'y a pas à se demander si elle est vraie ou fausse dans M si l'on ne sait pas à qui la variable x se réfère dans M. Pour cela on a besoin d'une assignation g. Si, par exemple, $g(x)$ est Jacques, alors on voit que $Beau(x)$ est vraie dans M relativement à l'assignation g.
On peut maintenant donner une définition formelle : soit $M = (D, I)$ une structure relationnelle et g une assignation dans M. On définit : la formule A est vraie dans M relativement à l'assignation g : $M, g \vDash A$.

Pour résumer

- Par évaluer (?????) la valeur de la formule $Beau(c)$ dans une structure M relativement à une assignation g, on n'a pas besoin de prendre en compte g : la valeur de c, qui est une constante, ne dépends pas de l'assignation g dans M.
  Autrement dit, pour toute assignations g et g' de M, on a :
  $M, g \vDash Beau(c) \leftrightarrow M, g' \vDash Beau(c)$
- Ce n'est plus le cas pour $Beau(x)$, x étant une variable. Il y a des assignations g et g' de M telles que :
  $M, g \vDash Beau(x)$ mais $M, g' \nvDash Beau(x)$
  Ainsi dans notre exemple précédent, on peut avoir :
  $g(x) = Jacques$ et $g'(x) = Pierre$.

Afin de mieux comprendre ce qui se passe ici, on a besoin de quelques définitions.

Définitions

- On dit d'une occurence d'un variable x apparaissant dans A qu'elle est liée par $\forall x A$ et $\exists x A$.
- Une occurence d'une variable qui n'est pas liée est dite libre.
- Une formule dans laquelle il n'y a pas d'occurence de variable libre est un énoncé.

Il n'est pas dificile de prouver que si A est un énoncé (*sentence*), alors pour chaque structure $M = (D, I)$ et chaque assignation g et g' dans M, on a :

$$M, g \vDash A \leftrightarrow M, g' \vDash A$$

Un énoncé est sans variable libre, donc sa valeur de vérité ne dépend pas des assignations.

L'implication stricte

On a besoin d'une relation plus forte que l'implication pour exprimer les paradoxes de l'implication matérielle :

$$p \to q \iff \Box(p \to q)$$

On peut alors définir les concepts aristotéliciens :

p est impossible	=	$\neg\Diamond p$
p est contingent	=	$\Diamond p \wedge \Diamond\neg p$
p et q sont compatibles	=	$\Diamond(p \wedge q)$
p et q sont incompatibles	=	$\neg\Diamond(p \wedge q)$