

Clément Aubert

22 décembre 2008

## Table des matières

<b>1 Exercices sur la logique modale propositionnelle</b>	<b>1</b>
1.1 Validité dans un monde, validité dans un modèle . . . . .	1
1.1.1 Exercice de logique propositionnelle . . . . .	1
1.1.2 Exercice de logique modale propositionnelle . . . . .	2
1.2 Validité d'une formule . . . . .	2
<b>2 Exercices sur la logique du premier ordre</b>	<b>2</b>
<b>3 Le Systeme de Carnap</b>	<b>3</b>
3.1 Quelques vérités logiques . . . . .	3
3.2 Les formules de Barcan . . . . .	3
3.3 Necessity of identicals . . . . .	4

## 1 Exercices sur la logique modale propositionnelle

### 1.1 Validité dans un monde, validité dans un modèle

Soient :

- $\mathcal{L} = p, q, r$
- $M = \langle W, P \rangle$  avec
  - $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
  - $P(p) = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
  - $P(q) = \{w_1, w_2\}$
  - $P(r) = \{w_2, w_3\}$

#### 1.1.1 Exercice de logique propositionnelle

Montrez de façon détaillée que :

1.  $M, w_1 \models r \rightarrow p$
2.  $M, w_2 \models (q \wedge r) \vee p$
3.  $M, w_3 \models (q \vee r) \wedge p$
4.  $M, w_4 \models \neg q$

### 1.1.2 Exercice de logique modale propositionnelle

Démontrez que :

1.  $M \models \Box p$
2.  $M \models \Diamond \neg r$
3.  $M \models \Box(r \rightarrow p)$
4.  $M \models \Diamond(q \wedge r)$
5.  $M \not\models \Box r \vee \Diamond \neg p$

### 1.2 Validité d'une formule

Dites à quelle condition une formule est valide et prouvez la validité de celles-ci :

1.  $\models \Box A \rightarrow \Diamond A$
2.  $\models \Box A \rightarrow A$
3.  $\models A \rightarrow \Box \Diamond A$
4.  $\models \Box A \rightarrow \Box \Box A$
5.  $\models \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$

Solution pour  $\models \Box A \rightarrow \Diamond A$ .

Soit  $M = (W, P)$  et  $w$  un monde dans  $W$ . On applique la clause  
 $M, w \models A \rightarrow B \iff$  Si  $M, w \models A$  alors  $M, w \models B$

Supposons que  $M, w \models \Box A$ . Donc, par la clause pour  $\Box A$  :  $M, w' \models A$ , pour chaque  $w'$  dans  $W$ .

En particulier,  $M, w' \models A$ , pour au moins un  $w'$  dans  $W$ .

Donc, par la clause pour  $\Diamond A$  :  $M, w \models \Diamond A$ .

## 2 Exercices sur la logique du premier ordre

Soient :

- $\mathcal{L} = \{c^0, m^0, s^0, F^1, A^2, E^2\}$
- $M = (D, I)$ , avec :
  - $D = \{\text{Cécile, Maria, Susi}\}$
  - $I(c) = \{\text{Cécile}\}$
  - $I(m) = \{\text{Maria}\}$
  - $I(s) = \{\text{Susi}\}$
  - $I(F) = \{\text{Cécile, Maria, Susi}\}$
  - $I(A) = \{\langle \text{Cécile, Maria} \rangle, \langle \text{Maria, Susi} \rangle\}$
  - $I(E) = \{\langle \text{Maria, Susi} \rangle, \langle \text{Maria, Cécile} \rangle\}$

1. Trouvez une structure  $M$  et une assignation  $g$  telle que  $M, g \models A(c, m) \wedge \exists x E(x, s) \wedge \forall y (F(y))$
2. Montrez que  $M \models (\forall x x \neq m \rightarrow E(m, x))$
3. Trouvez une assignation  $g$  telle que  $M, g \models F(x) \wedge A(c, x) \wedge E(x, c)$
4. Montrez qu'il n'existe pas d'assignation telle que  $M, g \models A(x, y) \wedge E(x, y) \wedge x \neq m$ . Concluez :  $M \not\models A(x, y) \wedge E(x, y) \wedge x \neq m$ .
5. Montrez que  $M \models \forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow x \neq y)$ .

### 3 Le Systeme de Carnap

#### 3.1 Quelques vérités logiques

En vous plaçant dans le système de Carnap, en vous dotant d'un ou de plusieurs états descriptifs  $S$  et d'assignation(s)  $g$ , démontrez les vérités logiques suivantes :

1.  $\models \Box A \leftrightarrow \models A$ .
2.  $\models t = t$ .
3.  $\not\models \forall x \forall y (x = y \rightarrow \Box(x = y))$
4.  $\not\models \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \Box(x \neq y))$

Les points 3 et 4 indiquent que la nécessité logique n'est pas la nécessité analytique. On peut les démontrer à l'aide de contre-exemples : prenez des cas où  $x = y$  et pourtant il n'est pas obligatoire que  $x$  soit égal à  $y$ , c'est à dire qu'il existe des états  $S$  où ça n'est pas le cas.

#### 3.2 Les formules de Barcan

Les formules de Barcan sont les suivantes :

- $\phi = \forall x \Box A(x) \rightarrow \Box \forall x A(x)$
- $\psi = \Box \forall x A(x) \rightarrow \forall x \Box A(x)$

1. Montrez que les formules de Barcan ne sont pas valides dans la classe de structures  $S5$  de Kripke. C'est-à-dire trouvez des structures  $S$  et  $S'$  telles que  $S \not\models \phi$  et  $S' \not\models \psi$ .
2. Quelles sont les libertés que l'on pourrait prendre par rapport aux règles de  $S5$  pour rendre  $\phi$  et  $\psi$  valides dans la classe des structures  $S5$  de Kripke ?

Solution pour (1).

Soit  $M = (S, I)$ , avec  $S = (W, D, R, E, w_0)$ , où :

-  $W = \{w_0, w\}$

-  $D = \{a, b\}$

-  $w_0 R w$

-  $E(w_0) = \{a\}, E(w) = \{a, b\}$

On spécifie maintenant  $I$  :

-  $I(P, w_0) = \{a\}, I(P, w) = \{a\}$

On va montrer que pour chaque assignation  $g$  on a :

$M, w_0, g \not\models \forall x \Box P(x) \rightarrow \Box \forall x P(x)$ .

On a  $M, w_0, g \models \forall x \Box P(x)$ , car (i)  $M, w_0, g(x/a) \models \Box P(x)$ .

Afin de montrer (i) il faut montrer que  $M, w, g(x/a) \models P(x)$ , ce qui revient à montrer que  $x^{M, g(x/a)} \in I(P, w)$ .

Mais  $x^{M, g(x/a)} = a$  et  $I(P, w) = \{a\}$ .

De l'autre cote, on observe que  $M, w_0, g \not\models \Box \forall x P(x)$ . Cela se voit de la manière suivante :

Supposons que  $M, w_0, g \models \Box \forall x P(x)$ . Alors  $M, v, g \models \forall x P(x)$  pour chaque  $v$  accessible de  $w_0$ .

Comme  $w$  est accessible de  $w_0$  on doit avoir  $M, w, g \models \forall x P(x)$ .

En d'autres termes, on doit avoir

$M, w, g(x, a) \models P(x)$  et  $M, w, g(x, b) \models P(x)$  Cela revient à  $x^{M, g(x/a)} \in I(P, w)$ ,

donc  $a \in \{a\} x^{M, g(x/b)} \in I(P, w)$ , donc  $b \in \{a\}$  Mais la dernière assertion est fausse.  
On a fini de montrer que  $M, w_0, g \not\models \forall x \Box P(x) \rightarrow \Box \forall x P(x)$ .

### 3.3 Necessity of identicals

Montrez la validité des formules suivantes en  $S5$  :

1.  $\forall x \forall y (x = y \rightarrow \Box(x = y))$
2.  $c = d \rightarrow \Box(c = d)$

Pour toute question plus technique, adressez-vous à M. Sandu : sandu@mappi.helsinki.fi