Présentation simplifiée de la Sémantique de Kripke

Clément Aubert

28 novembre 2008

Table des matières

Nous allons simplifier la sémantique de Kripke, en considérant que tous les mondes ont le même univers.

1 Syntaxe

1.1 La structure

Le point de départ est la notion de structure : $S = \langle W, D, w_0\rangle$ où :

- W est un ensemble non-vide de mondes possibles. On emploie $w_1, w_2, v, v_1, ...$ pour désigner ces mondes.

– D est l'univers de discours, appelé aussi le domaine de S.
– w_0 est le monde actuel ($w_0 \in W$).

1.2 Le modèle : structure et valuation

On forme un modèle $M = \langle S, I\rangle$ basé sur S en ajoutant à S une valuation I :

– I assigne à chaque couple constante individuelle c - monde w dans W, un individu de D, noté $I(w, c)$, qui est l'individu désigné par c dans le monde w par I.
– I assigne à chaque couple symbole de prédicat P - monde possible w dans W une extension, notée $I(w, P)$: c'est l'extension du symbole P dans w selon I. L'extenstion est une relation et dépend du nombre de place du symbole P, de son arité. Ainsi, si l'arité de P est n, $I(w, P) \subset D^n$.

1.3 Exemple

On se dote du langage $\mathcal{L}$ qui contient deux constantes individuelles, c et d, et deux symboles de prédicats, P et Q, P étant à une place, Q à deux.

Soit $S = \langle W, D, w_0\rangle$ avec : - $W = \{w_0, w_1\}$
- $D = \{a_1, a_2\}$

Soit $M = \langle S, I\rangle$ un modèle basé sur S où I est défini de la façon suivante :

– Pour les constantes individuelles :
  $I(w_0, c) = a_1 \quad I(w_1, c) = a_2$
  $I(w_0, d) = a_2 \quad I(w_1, d) = a_2$
  C'est-à-dire que c désigne a_1 dans w_0 et a_2 dans w_1,d désigne a_2 aussi bien dans w_0 que dans w_1.

– Pour les prédicats :
  $I(w_0, P) = \{a_1\} \qquad I(w_1, P) = \{a_1, a_2\}$
  $I(w_0, Q) = \{\langle a_1, a_2\rangle\} \quad I(w_1, Q) = \{\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle\}$
  C'est-à-dire que l'extension de P dans w_0 est $\{a_1\}$, l'extension de P dans w_1 est $\{a_1, a_2\}$.
  De même, l'extension de Q dans w_0 est $\{\langle a_1, a_2\rangle\}$, l'extension de Q dans w_1 est $\{\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle\}$.

1.4 Les assignations

On introduit desormais la notion d'assignation. Une assignation g assigne à chaque variable x un individu : $g(x) \in D$.
Si g est une assignation, et a un individu appartenant à D, alors $g(x/a)$ est l'assignation identique à g, sauf qu'elle assigne à la variable x l'individu a. En d'autres termes :
$$\begin{cases} g(x/a)(y) & = g(y) \text{ pour chaque } y \neq x \\ g(x/a)(x) & = a \end{cases}$$

1.5 Les termes

On définit les termes d'un langage du premier ordre de la façon suivante :

1. Chaque constante est un terme.
2. Chaque variable est un terme.
3. Rien n'est un terme que ce qui est défini par les clauses 1. et 2.

Maintenant qu'on a défini les notions de structure $S = \langle W, D, w_0 \rangle$, de modèle $M = \langle S, I \rangle$ basé sur S, et qu'on a fixé une assignation g, on observe que pour chaque monde w, chaque terme t reçoit une valeur sémantique relativement à w et à g, que l'on note $t^{w,g}$:

– Si t est une constante individuelle c, alors $c^{w,g}$ est $I(w, c)$
– Si t est une variable x, alors $x^{w,g}$ est $g(x)$.

Encore une fois, on observe que la valeur sémantique d'une constante individuelle varie d'un monde à l'autre, car il se peut très bien que $c^{w_1,g} \neq c^{w_2,g}$, alors que la valeur sémantique d'une variable x est constante : $x^{w_1,g} = x^{w_2,g}$, quels que soient w_1, w_2 et g.

1.6 Exemple

Soit S une structure et $M = \langle S, I \rangle$ un modèle basé sur S, tous deux comme dans l'exemple précédent (voir 1.3).

Soit g l'assignation qui assigne à chaque variable l'individu a_1, i.e. $g(x_1) = g(x_2) = ... = a_1$.

$g(x_2/a_2)$ est l'assignation : $g(x_2/a_2)(x_1) = g(x_2/a_2)(x_3) = g(x_2/a_2)(x_4) = ... = a_1$
$g(x_2/a_2)(x_2) = a_2$

$g(x_3/a_2)$ est l'assignation : $g(x_3/a_2)(x_1) = g(x_3/a_2)(x_2) = g(x_3/a_2)(x_4) = ... = a_1$
$g(x_3/a_2)(x_3) = a_2$

On peut maintenant calculer :

Pour le monde w_0 :
$c^{w_0,g} = I(w_0, c) = a_1$
$d^{w_0,g} = I(w_0, d) = a_2$
$x_1^{w_0,g} = g(x_1) = a_1$
$x_2^{w_0,g} = g(x_2) = a_1$
$x_1^{w_0,g(x_2/a_2)} = g(x_2/a_2)(x_1) = a_1$
$x_2^{w_0,g(x_2/a_2)} = g(x_2/a_2)(x_2) = a_2$

Pour le monde w_1 :
$c^{w_1,g} = I(w_1, c) = a_2$
$d^{w_1,g} = I(w_1, d) = a_2$
$x_1^{w_1,g} = g(x_1) = a_1$
etc.

2 Sémantique

2.1 La relation $\vDash$

Fixons la structure $S = \langle W, D, w_0 \rangle$, un modèle $M = \langle S, I \rangle$ basé sur S et une assignation g dans M. Pour chaque monde possible w dans W et chaque formule A du langage modal de premier ordre, on définit la relation sémantique :

$$\langle M, w, g \rangle \vDash A$$

C'est-à-dire : A est vraie dans le monde possible w relativement à l'assignation g.

On définit ensuite par récurrence sur la hauteur de A, A et B étant des formules du langage modal de premier ordre :

1. $\langle M, w, g\rangle \vDash P(t_1, ..., t_n) \leftrightarrow \langle t_1^{w,g}, ..., t_n^{w,g}\rangle \in I(w, P)$
2. $\langle M, w, g\rangle \vDash t_1 = t_2 \leftrightarrow t_1^{w,g}$ est identique à $t_2^{w,g}$
3. $\langle M, w, g\rangle \vDash \neg A \leftrightarrow \langle M, w, g\rangle \nvDash A$
4. $\langle M, w, g\rangle \vDash A \wedge B \leftrightarrow \langle M, w, g\rangle \vDash A$ et $\langle M, w, g\rangle \vDash B$
5. $\langle M, w, g\rangle \vDash A \vee B \leftrightarrow \langle M, w, g\rangle \vDash A$ ou $\langle M, w, g\rangle \vDash B$
6. $\langle M, w, g\rangle \vDash \forall x A \leftrightarrow$ chaque a dans D vérifie $\langle M, w, g(x/a)\rangle \vDash A$
7. $\langle M, w, g\rangle \vDash \exists x A \leftrightarrow$ il y a un individu a dans D tel que $\langle M, w, g(x/a)\rangle \vDash A$
8. $\langle M, w, g\rangle \vDash \Box A \leftrightarrow$ pour chaque monde v dans W : $\langle M, v, g\rangle \vDash A$

2.2 Exemples

Soient $S = \langle W, D, w_0\rangle$, $M = \langle S, I\rangle$ et g comme dans les exemples précédents. On a :

2.2.1 $\langle M, w_0, g\rangle \vDash P(c)$

$\langle M, w_0, g\rangle \vDash P(c)$, car	$c^{w_0,g}$	$\in$	$I(w_0, P)$
En effet, si on interprète :	a_1	$\in$	$\{a_1\}$

2.2.2 $\langle M, w_0, g\rangle \vDash Q(c, c)$

$\langle M, w_0, g\rangle \vDash Q(c, c)$, car	$\langle c^{w_0,g}, c^{w_0,g}\rangle$	$\in$	$I(w_0, Q)$
En interprétant :	$\langle a_1, a_1\rangle$	$\in$	$\{\langle a_1, a_1\rangle\}$

2.2.3 $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash P(d)$

$\langle M, w_0, g\rangle \nvDash P(d)$, car	$d^{w_0,g}$	$\notin$	$I(w_0, P)$
On vérifie en effet que :	a_2	$\notin$	$\{a_1\}$

2.2.4 $\langle M, w_1, g\rangle \vDash c = d$

$\langle M, w_1, g\rangle \vDash c = d$, car $c^{w_1,g} = I(w_1, c) = a_2$
$d^{w_1,g} = I(w_1, d) = a_2$

Les interprétations de c et de d dans le monde w_1 en fonction de g sont donc identiques.

2.2.5 $\langle M, w_1, g\rangle \vDash \forall x_1 P(x_1)$

$$\langle M, w_1, g\rangle \vDash \forall x_1 P(x_1), \text{ car } \begin{cases} 1)\langle M, w_1, g(x_1/a_1)\rangle \vDash P(x_1) \\ \text{et} \\ 2)\langle M, w_1, g(x_1/a_2)\rangle \vDash P(x_1) \end{cases}$$

Pour montrer 1), nous observons que :

$\langle M, w_1, g(x_1/a_1)\rangle \vDash P(x_1)$, car	$x_1^{w_1,g(x_1/a_1}$	$\in$	$I(w_1, P)$
	a_1	$\in$	$\{a_1, a_2\}$

Pour 2), on a :

$\langle M, w_1, g(x_1/a_2)\rangle \vDash P(x_1)$, car	$x_1^{w_1,g(x_1/a_2}$	$\in$	$I(w_1, P)$
	a_2	$\in$	$\{a_1, a_2\}$

2.2.6 Le statut de $\Box\exists x_1(x_1 = c)$

$\langle M, w_0, g\rangle \vDash \exists x_1(x_1 = c) \leftrightarrow$ il y a un individu a dans D tel que $\langle M, w_0, g(x_1/a)\rangle \vDash (x_1 = c)$.

L'individu a que l'on cherche est a_1 :
$\langle M, w_0, g(x_1/a_1)\rangle \vDash (x_1 = c)$, car $x_1^{w_0,g(x_1/a_1)} = I(w_0, c) = a_1$
$\langle M, w_1, g\rangle \vDash \exists x_1(x_1 = c)$ se démontre de façon analogue.

Ainsi, on a démontré que $\langle M, w_0, g\rangle \vDash \Box\exists x_1(x_1 = c)$
$\langle M, w_1, g\rangle \vDash \Box\exists x_1(x_1 = c)$

En fait, il est facile de voir que $\langle M, w_0, g\rangle \vDash \exists x_1(x_1 = c)$ pour n'importe quelle assignation g dans M. Soit g une assignation arbitraire dans M, On a :
$\langle M, w_0, g\rangle \vDash \exists x_1(x_1 = c) \leftrightarrow$ il y a un individu a dans D tel que $\langle M, w_0, g(x_1/a)\rangle \vDash x_1 = c$. On trouve toujours cet individu : c'est a_1.

2.2.7 Le statut de $\Box\forall x_1 P(x_1)$

Cependant, $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash \Box\forall x_1 P(x_1)$ et $\langle M, w_1, g\rangle \nvDash \Box\forall x_1 P(x_1)$.

On a $\langle M, w_0, g\rangle \vDash \Box\forall x_1 P(x_1) \leftrightarrow \langle M, w_1, g\rangle \vDash \Box\forall x_1 P(x_1)$: les conditions de validité des deux énoncés sont liées, il nous suffit donc de démontrer que l'un des deux n'est pas vérifié.

On étudie les conditions de validité de $\langle M, w_0, g\rangle \vDash \Box\forall x_1 P(x_1)$ et on montre qu'elles ne sont pas remplies :

$$\langle M, w_0, g\rangle \vDash \Box\forall x_1 P(x_1) \leftrightarrow \begin{cases} \langle M, w_0, g\rangle \vDash \forall x_1 P(x_1) \text{ et} \\ \langle M, w_1, g\rangle \vDash \forall x_1 P(x_1) \end{cases}$$

On a montré que $\langle M, w_1, g\rangle \vDash \forall x_1 P(x_1)$ en e), mais $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash \forall x_1 P(x_1)$.

En fait : $\langle M, w_0, g\rangle \vDash \forall x_1 P(x_1) \leftrightarrow \begin{cases} \langle M, w_0, g(x_1/a_1)\rangle \vDash P(x_1) \text{ et} \\ \langle M, w_0, g(x_1/a_2)\rangle \vDash P(x_1) \end{cases}$

Mais il est facile de voir que $\langle M, w_0, g(x_1/a_2)\rangle \nvDash P(x_1)$.

Pour reprendre, puisque $\langle M, w_0, g(x_1/a_2)\rangle \nvDash P(x_1)$, on a $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash \forall x_1 P(x_1)$, et donc $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash \Box\forall x_1 P(x_1)$ et $\langle M, w_1, g\rangle \nvDash \Box\forall x_1 P(x_1)$.

2.3 Vérité relative à une assignation, à un modèle, validité

Maintenant qu'on a défini $\langle M, W, g\rangle \vDash A$ pour W, g et A arbitraires, on va définir d'autres notions sémantiques. On fixe comme d'habitude $S = \langle W, D, w_0\rangle$, $M = \langle S, I\rangle$ et une assignation g dans M.

1. On dit que la forumule A est vraie dans le modèle M relativement à l'assignation g, $\langle M, g\rangle \vDash A$ si et seulement si $\langle M, w_0, g\rangle \vDash A$.

2. On dit que A est vraie dans M, $M \vDash A$, si et seulement si $M, g \vDash A$ pour chaque assignation g dans M.
3. On dit que A est vraie dans la structure S, $S \vDash A$ si et seulement si $M \vDash A$ pour chaque structure $M = \langle S, I \rangle$ basée sur S.
4. On dit que A est valide dans la classe K, K étant une classe de structures, $K \vDash A$ si et seulement si $S \vDash A$ pour chaque structure S dans K.

2.3.1 $M \vDash \Box \exists x_1 (x_1 = c)$

On a vu en 2.2.6 que $\langle M, w_0, g \rangle \vDash \Box \exists x_1 (x_1 = c)$ et
$\langle M, w_1, g \rangle \vDash \Box \exists x_1 (x_1 = c)$

Donc, par la clause 1) de la section précédente, on a : $\langle M, g \rangle \vDash \Box \exists x_1 (x_1 = c)$ pour chaque assignation g dans M choisie comme dans l'exemple.
Donc, par la clause 2), $M \vDash \Box \exists x_1 (x_1 = c)$

2.3.2 $K \nvDash \Box \exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 = x_2)$

Nous allons montrer que cette formule $\Box \exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 = x_2)$ n'est pas valide dans la classe K de toutes les structures S. On va produire pour cela une structure $S = \langle W, D, w_0 \rangle$ telle que $S \nvDash \exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 = x_2)$.

Par définition, $S' \vDash \exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 = x_2) \leftrightarrow$ pour chaque modèle $M = \langle S', I \rangle$ basé sur S', on a : $M \vDash \Box \exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 = x_2)$.

On considère la structure S telle que $W = \{w_0\}$ et $D = \{a_1\}$, et on va s'assurer qu'elle ne vérifie pas cette formule. Pour cela, on doit trouver un modèle M basé sur S qui ne vérifie pas la nécessité qu'il y ait deux éléments qui soient différents. Le modèle que nous cherchons est tel que I ne compte pas : ce peut être n'importe quelle fonction de valuation, puisque nous n'avons pas besoin d'interprêter des constantes ou des prédicats.
On souhaite donc montrer que $\langle M, w_0, g \rangle \nvDash \Box \exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 = x_2)$ pour n'importe quelle assignation g. Comme w_0 est le seul monde dans W, on doit montrer que $\langle M, w_0, g \rangle \nvDash \exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 = x_2)$.

Par définition :
$\langle M, w_0, g \rangle \vDash \exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 = x_2) \leftrightarrow$ il y a un individu b_1 et un individu b_2 tels que :
$\langle M, w_0, g(x_1/b_1, x_2/b_2) \rangle \vDash \neg (x_1 = x_2)$
Mais cela est impossible dans notre structure, car elle ne compte qu'un seul élément, a_1.

Pour toute assignation g, on a donc $\langle M, w_0, g \rangle \vDash x_1 = x_2$: on a trouvé une modèle de la structure S qui ne vérifie pas $\exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 = x_2)$, et donc la classe des structures ne vérifie pas $\Box \exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 = x_2)$
Autrement dit, toutes les structures ne vérifient pas le fait qu'elles comportent deux individus différents.

2.4 *De dicto, de re*

Grâce à la logique modale et à l'interprétation avec des univers communs [1], on peut faire une distinction entre $\Box\exists x(x = c)$ et $\exists x\Box x = c$.
La première est une modalité *de dicto* : il est <u>nécessaire</u> qu'il y ait quelqu'un qui soit c.
La seconde est une modalité *de re* : il y a quelqu'un qui est <u>nécessairement</u> c.

On voit désormais que la première est valide, tandis que la seconde ne l'est pas. En effet, il est facile de trouver une structure $S = \langle W, D, w_0\rangle$ et un modèle $M = \langle S, I\rangle$ basé sur S tel que $M \nvDash \exists x\Box x = c$.
Soient $W = \{w_0, w_1\}$, $D = \{a_1, a_2\}$ et I une valuation qui interprète c dans w_0 par a_1 et dans w_1 par a_2. Formellement $I(w_0, c) = a_1$ et $I(w_1, c) = a_2$.
Maintenant on peut montrer que pour chaque assignation g dans M on a $\langle M, w_0, g\rangle \nvDash \exists x\Box x = c$.
On le démontre par l'absurde : supposons que $\langle M, w_0, g(x/a)\rangle \vDash \Box x = c$.

Dans ce cas on doit avoir $\langle M, w_0, g(x/a)\rangle \vDash x = c$
et
$\langle M, w_1, g(x/a)\rangle \vDash x = c$

Ce qui revient à dire que $x^{w_0,g(x/a)} = c^{w_0,g(x/a)}$
et
$x^{w_1,g(x/a)} = c^{w_1,g(x/a)}$

Mais cela est impossible, car on devrait avoir $a = I(w_0, c) = I(w_1, c)$, or on a fixé que $a_1 = I(w_0, c) \neq I(w_1, c) = a_2$.
Ainsi, on a exhibé un modèle qui ne vérifie pas $\exists x\Box x = c$, et cette formule n'est donc pas valide dans la classe des structures.

2.5 Valide dans une structure, valide dans une classe

Il importe de bien distinguer la notion de valide dans une structure, $S \vDash A$, et valide dans une classe, $K \vDash A$.

Supposons que $S = \langle W, D, w_0\rangle$, ou D est l'ensemble des individus du monde actuel, disons $D = \{a_1, ..., a_n\}$. Dans ce cas, il est facile de prouver que $S \vDash \exists x_1....\exists x_n(x_1 \neq x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} \neq x_n)$.
Cette formule *dit* que le domaine comporte au moins n individus, ce qui est le cas de la structure que l'on a fixé. Pour n'importe quelle interprétation I, on va avoir $\langle S, I\rangle \vDash \Box\exists x_1....\exists x_n(x_1 \neq x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} \neq x_n)$.
Pourtant, il est évident que $K \nvDash \exists x_1....\exists x_n(x_1 \neq x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} \neq x_n)$: il suffit de trouver une strucure S' dont le domaine D' ait une cardinalité inférieure à n.
La différence entre les deux notions correspond à la différence ntre deux conceptions de vérité logique.

[1] En fait, c'est grâce à l'interprétation des variables x par l'assignation g qui ne dépends pas des mondes possibles