Exercices sur connaissance et croyance.

Rappels :
- La relation d'accessibilité pour la connaissance, qu'on appelle relation épistémique et que l'on note R, est transitive et réflexive.
- La relation d'accessibilité pour la croyance, qu'on appelle relation doxastique et que l'on note R^*, est transitive mais n'est pas réflexive.
- Toute relation doxastique est relation épistémique : $R^* \subset R$.

On considerera ici la structure $M = (W, R_a, R_b, R_a^*, R_b^*, V)$, munie des agents a et b et des formules atomiques p et q.

Exercice 1 :
Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses dans le monde M sus-mentionné :

1. Si $M, w \vDash K_a q$ et wR_a^*v, alors $M, v \vDash K_a q$.
2. Si $M, w \vDash K_a q$ et wR_a^*v, alors $M, v \vDash q$.
3. Si $M, w \vDash B_a q$ et $wR_a v$, alors $M, v \vDash B_a q$.
4. Si $M, w \vDash B_a q$ et $wR_a v$, alors $M, v \vDash q$.

Exercice 2 :
Construisez des modèles qui contredisent les formules suivantes :

1. $B_a B_b p \to B_a p$
2. $B_a K_b p \to B_a p$

Solutions :
Exercice 1 :

1. Démontrer la validité de cette formule nécessite d'utiliser l'axiome $K_a q \to B_a K_a q$. Cet axiome démontré, on obtient : $M, w \vDash K_a q \wedge B_a K_a q$, donc tout monde en relation avec w par R_1^* vérifie $K_a q$, ce qui nous était demandé de démontrer.
2. Puisque chaque alternative doxastique est une aternative épistémique, si l'on a wR_a^*v on a $wR_a v$, et il est donc trivial que si $M, w \vDash K_a q$ et $wR_a v$, alors $M, v \vDash q$.
3. La validité de cette formule est annexée à la validité de $B_a q \to K_a B_a q$. En effet, $M, v \vDash B_a q$ si et seulement si pour tout monde w en relation avec v par R_a, $M, w \vDash K_a B_a q$. Or on a ici des mondes w en relation avec v par R_a tels que $M, w \vDash B_a q$. Si la validité en un monde de $B_a q$ implique celle de $K_a B_a q$, alors il devient trivial que cette troisième formule est valide. Hintikka rejette la validité de cette formule, car elle implique aussi que toutes les croyances se transmettent par les canaux de la connaissance (les relations épistémiques), donc que celles-ci ne sont plus révisables.
4. La validité de cette formule a les mêmes enjeux et conséquences que la validité de la formule précédente, elle n'est qu'une autre conséquence de l'acceptation de la validité de la formule $B_a q \to K_a B_a q$.

Exercice 2 :

1. On considère la structure $M = (W, R_a^*, R_b^*, V)$, avec $W = (w_1, w_2, w_3)$, l'atome p tel que $\{w_3\} \in V(p)$, et enfin $\{\langle w_1, w_2\rangle\} \in R_a^*$ et $\{\langle w_2, w_3\rangle\} \in R_b^*$. On a alors $M, w_3 \vDash p$, $M, w_2 \vDash B_b p$, $M, w_1 \vDash B_a B_b p$, et surtout $M, w_1 \nvDash B_a p$, car aucun monde vérifiant p n'est en relation avec w_1 par R_a^*.
2. On prend cette fois-ci la structure $M = (W, R_a^*, R_b, V)$, avec $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)$, l'atome p tel que $\{w_3\} \in V(p)$, et $\{w_4\} \in V(\neg p)$. Enfin $\{\langle w_1, w_2\rangle; \langle w_1, w_4\rangle\} \in R_a^*$ et $\{\langle w_2, w_3\rangle\} \in R_b$: la structure ne varie avec celle d'auparavant qu'en ceci qu'on a changé la nature de la relation propre à l'agent b, qui n'est plus doxastique mais épistémique, et par l'ajout du monde w_4 qui vérifie $\neg p$ et est en relation avec w_1 par R_a^*. Puisque $M, w_2 \vDash K_b p$, $M, w_2 \vDash p$, car R_b est réflexive. Mais puisque $M, w_4 \vDash \neg p$, et puisque w_1 est en relation par R_a^* avec w_2 et w_4, on a : $M, w_1 \vDash \neg B_a p$, c'est-à-dire que a ne croit pas que p, puisque w_1 est en relation par R_a^* avec un monde qui vérifie p, w_2, et avec un monde qui vérifie $\neg p$, w_4. Ainsi, on a $M, w_1 \vDash B_a K_b p$ sans avoir $M, w_1 \vDash B_a p$, car on a $M, w_1 \vDash \neg B_a p$: le modèle construit contredit bien la formule proposée.

En language usuel, ces deux formules signifient que ce n'est pas parce que je crois que quelqu'un croit que p que je crois que p, et que ce n'est pas parce que je crois que quelqu'un sait que p que je crois que p.
Par contre, si je sais que quelqu'un sait que p, alors je sais que p. C'est la transmission du savoir, qui se formalise ainsi : $K_a K_b p \rightarrow K_a p$.