# Logique épistémique

Gabriel Sandu
Paris 1

September 2, 2008

## 1 La syntaxe de la logique propositionnelle

Le langage de la logique propositionnelle contient des symbols propositionnels atomiques, $p_0$, $p_1$, $p_2$... qu'on appelle aussi *des formules atomiques.* On va former des formules complexes à l'aide des connecteurs suivants :

| | |
|---|---|
| $\perp$ | mathitfalsum |
| $\wedge$ | la conjonction |
| $\vee$ | mathitla disjonction |
| $\neg$ | mathitla négation |
| $\rightarrow$ | mathitl'implication |
| $\leftrightarrow$ | mathitl'equivalence |

**Definition 1** *On définit les formules du langage propositionnel :*

**1.** *Les formules atomiques sont des formules ;*

**2.** *Si $A$ et $B$ sont des formules, alors $\perp, \neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ et $(A \leftrightarrow B)$ sont des formules aussi.*

## 2 La sémantique de la logique propositionnelle

Les formules $\perp, \neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ *et* $(A \leftrightarrow B)$ sont purement des symboles. On va maintenant leur donner une interprétation. Chaque formule atomique $p_0, p_1, p_2, \ldots$ va être interprétée par une valeur de vérité, le *vrai* $(v)$ ou le *faux* $(f)$. D'un point de vue technique on introduit une valuation $V$, une fonction qui associe avec chaque $p_i$ *la valeur $v$ ou $f$*. Par exemple si $V$ associe avec $p_0$ la valeur $v$, avec $p_1$ la valeur $f$, avec $p_2$ la valeur $v$, etc., on écrit

$$V(p_0) = v$$
$$V(p_1) = f$$
$$V(p_2) = v$$
etc.

Après avoir fixé l'interprétation des formules atomiques, on doit calculer les valeurs de vérité des formules complexes.

**Definition 2** *Soit $A$ une formule et $V$ une valuation. La valeur de vérité de $A$ selon $V$, symboliquement $V(A)$, est définie de la façon suivante:*

**1.** *Si $A$ est une formule atomique, $p_i$, alors $V(A)$ est déjà définie $(= V(p_i))$*

**2.** *Si $A$ est $\perp$, alors $V(A) = f$;*

**3.** *Si $A$ est $\neg B$, et $V(B)$ est déjà définie, alors $V(A) = v$ ssi $V(B) = f$; et $V(A) = f$ ssi $V(B) = v$*

**4.** *Si $A$ est $(B \wedge C)$, et $V(B)$ et $V(C)$ sont définies, alors $V(A) = v$ ssi $V(B) = v$ et $V(C) = v$;*

**5.** *Si $A$ est $(B \vee C)$, et $V(B)$ et $V(C)$ sont définies, alors $V(A) = v$ ssi $V(B) = v$ ou $V(C) = v$ (ou les deux à la fois);*

**6.** *Si $A$ est $(B \to C)$, et $V(B)$ et $V(C)$ sont définies, alors $V(A) = v$ ssi si $V(B) = v$ alors $V(C) = v$; (alternativement: $V(A) = v$ ssi $V(B) = f$ ou $V(C) = v$ ou les deux à la fois);*

**7.** *Si $A$ est $(B \leftrightarrow C)$, et $V(B)$ et $V(C)$ sont définis, alors $v(A) = v$ ssi $V(B) = V(C)$.* ■

Donc la conjonction $(B \wedge C)$ est fausse $(V(B \wedge C) = f)$ exactement quand l'un des conjoints est faux: $V(B) = f$ *ou* $V(C) = f$

La disjonction $(B \vee C)$ est fausse quand les deux disjoints sont faux: $V(B) = f$ *et* $V(C) = f$

L'implication $(B \to C)$ est fausse exactement quand l'antécédent $B$ est vrai et le conséquent $C$ est faux: $V(B) = v$ *et* $V(C) = f$

**Example 3** *Soit $V$ la valuation qui a les valeurs suivantes:*

$$V(p_0) = v, V(p_1) = f$$

*On peut maintenant calculer:*

$$\begin{array}{ll} V(\neg p_0) = f & \textit{(Définition 2.3)} \\ V(\neg p_1) = v & \textit{(Définition 2.3)} \\ V(p_0 \wedge \neg p_1) = v & \textit{(Définition 2.4)} \\ V(p_0 \wedge p_1) = f & \textit{(Définition 2.4)} \\ V(p_0 \to p_1) = f & \textit{(Définition 2.6)} \end{array}$$

**Example 4** *Soit $A$ la formule $((p_0 \vee p_1) \to \neg p_0) \to (p_1 \to p_0)$ et $V$ la valuation qui a les valeurs suivantes:*

$$V(p_0) = v, V(p_1) = f,$$

*On a:*

| | |
|---|---|
| *1.* $V(\neg p_0) = f$ | *(Définition 2.3.)* |
| *2.* $V(p_0 \vee p_1) = v$ | *(Définition 2.5.)* |
| *3.* $V((p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_0) = f$ | *(1, 2, et Définition 2.4.)* |
| *4.* $V(p_1 \rightarrow p_0) = v$ | *(Définition 2.6.)* |
| *5.* $V(A) = v$ | *(3, 4, et Définition 2.6.).* |

$\blacksquare$

## 2.1 Tautologies et conséquence logique

Nous savons calculer la valeur de vérité $V(A)$ d'une formule $A$ quand une valuation $V$ est donnée. On s'intéresse maintenant à la question:

Est-ce que $A$ est vraie pour chaque valuation possible?

Pour répondre à cette question on doit calculer $V(A)$ pour chaque valuation possible $V$, ce qui revient à dresser la *table de vérité* de $A$.

Si $A$ est une formule complexe qui contient $n$ symbols atomiques, il y a $2^n$ valuations.

**Example 5** *Le tableau de vérité de la formule* $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))$

| $p_0$ | $p_1$ | $(p_1 \rightarrow p_0)$ | $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))$ |
|---|---|---|---|
| $v$ | $v$ | $v$ | $v$ |
| $v$ | $f$ | $v$ | $v$ |
| $f$ | $v$ | $f$ | $v$ |
| $f$ | $f$ | $v$ | $v$ |

*Chaque ligne correspond à une valuation:*

$$V_1(p_0) = v, V_1(p_1) = v$$
$$V_2(p_0) = v, V_2(p_1) = f$$
$$V_3(p_0) = f, V_3(p_1) = v$$
$$V_4(p_0) = f, V_4(p_1) = f$$

Parce que pour chaque valuation $V$ on a $V((p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))) = v$, on appelle $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))$ une tautologie.$\blacksquare$

**Definition 6** *Soit $A$ une formule.*

**1.** *$A$ est une* `tautologie` *si $V(A) = v$ pour chaque valuation $V$;*

**2.** *$A$ est une* `contradiction` *si $V(A) = f$ pour chaque valuation $V$;*

***Definition 7*** *Soit $X$ un ensemble de formules.*

**1.** *La formule $B$ est une consequence logique de $X$, symboliquement $(X \models B)$, ssi pour chaque valuation $V$ on a: Si $V(A) = v$, pour chaque $A$ dans $X$, alors $V(B) = v$.*

**2.** *Quand $X$ est vide ($X = \emptyset$) clause (1) devient:*

*$B$ est une consequence logique de l'ensemble vide, $\models B$, ssi pour chaque valuation $V$ on a: $V(B) = v$.*

■

Selon Définition 6, on appelle une formule qui est vraie pour chaque valuation $V$ une tautologie. Donc la clause (2) de la Définition 4 nous dit qu'une formule est une tautologie ssi elle est la conséquence logique de l'ensemble vide.

**Example 8** *Montrons que $\{A, B\} \models C$, où*

$$\begin{array}{l} A : p_0 \to p_1 \\ B : \neg p_1 \\ C : \neg p_0 \end{array}$$

*Soit $V$ une valuation arbitraire, telle que $V(p_0 \to p_1) = v$ et $V(\neg p_1) = v$. On doit montrer que $V(\neg p_0) = v$.*

*Etant donné que $V(p_0 \to p_1) = v$, on a aussi, par Definition 2.6: $V(p_0) = f$ ou $V(p_1) = v$.*

*Comme $V(\neg p_1) = v$, par Definition 2.3., on a aussi $V(p_1) = f$. Donc $V(p_1) = v$ ne peut pas être le cas (pourquoi?).*

*La seule possibilité qui nous reste est $V(p_0) = f$, donc par Definition 2.3. $V(\neg p_0) = v$.*

# 3 Logique épistémique

## 3.1 Langage:

| | |
|---|---|
| $p_i$ | formule atomique |
| $A \vee B$ | $A$ ou $B$ |
| $A \wedge B$ | $A$ et $B$ |
| $A \to B$ | Si $A$, alors $B$ |
| $K_i A$ | l'agent i sait que $A$ |

S'il y a plusieurs agents, on va avoir des formules comme:

$K_1 K_2 p$ l'agent 1 sait que l'agent 2 sait que $p$

## 3.2 Sémantique

Le langage est interprété dans des modèles

$$M = (W, R_1, ..., R_n, V)$$

où:

- $W$ est un ensemble de mondes possibles
- Chaque $R_i$ est une "relation d'accessibilité" dans $W$.

| | |
|---|---|
| $R_i(v, w)$ | Pour l'agent $i$, le monde $w$ est accessible du monde $v$. |

- $V$ est une fonction d'évaluation qui associe avec chaque formule atomique $p_i$ un ensemble de mondes $V(p_i)$ : l'ensemble des mondes où $p_i$ est vrai.

Quelques mots sur la relation d'accessibilité. Le fait qu'un monde $w$ est accessible pour l'agent $i$ d' un monde $v$ veut dire que $w$ est compatible avec l'information que $i$ possède dans $v$.

**Example 9** *Supposons que i jete un dé en l'air. Il y a six résultats possibles, donc six mondes possibles, indiqués par:*

| | |
|---|---|
| $w_1$ | *le dé indique 1* |
| $w_2$ | *le dé indique 2* |
| $w_3$ | *le dé indique 3* |
| $w_4$ | *le dé indique 4* |
| $w_5$ | *le dé indique 5* |
| $w_6$ | *le dé indique 6* |

Si le monde "actuel" dans lequel l'agent $i$ se trouve est indiqué par $w$, la relation $R_i$ est donnée par:

$$R_i = \{\langle w, w_1\rangle, \langle w, w_2\rangle, \langle w, w_3\rangle, \langle w, w_4\rangle, \langle w, w_5\rangle, \langle w, w_6\rangle\}$$

**Example 10** *Supposons qu'on a 3 cartes $A, B$ et $C$ et deux joueurs, 1 et 2. Chaque joueur reçoit une carte, et la 3ème carte reste sur la table. Il y a six mondes possibles:*

| | |
|---|---|
| $w_1 = \langle A, B\rangle$ | *1 a la carte $A$, 2 a la carte $B$* |
| $w_2 = \langle A, C\rangle$ | *1 a la carte $A$, 2 a la carte $C$* |
| $w_3 = \langle B, C\rangle$ | *1 a la carte $B$, 2 a la carte $C$* |
| $w_4 = \langle B, A\rangle$ | *1 a la carte $B$, 2 a la carte $A$* |
| $w_5 = \langle C, A\rangle$ | *1 a la carte $C$, 2 a la carte $A$* |
| $w_6 = \langle C, B\rangle$ | *1 a la carte $C$, 2 a la carte $B$* |

*Les relations d'accessibilité. Supposons que les joueurs se trouvent dans le monde $w_1$. Etant donné que 1 a la carte $A$ et il ne sait pas quelle est la carte reçue par 2, il y a deux situations qui sont possibles de son point de vue:*

*1 a la carte $A$, 2 a la carte $B$*
*1 a la carte $A$, 2 a la carte $C$*

*On indique ce fait par*

$$R_1(w_1, w_1) \text{ et } R_1(w_1, w_2)$$

*Du point de vue du joueur 2, il y a aussi deux alternatives:*

*1 a la carte A, 2 a la carte B*
*1 a la carte C, 2 a la carte B*

*Donc*

$$R_2(w_1, w_1) \text{ et } R_2(w_1, w_6)$$

*Voici une description complète des deux relations d'accessibilité:*

$$\begin{aligned} R_1 &= \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle, \langle w_3, w_3\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \\ &\quad \langle w_4, w_4\rangle, \langle w_4, w_3\rangle, \langle w_5, w_5\rangle, \langle w_5, w_6\rangle, \langle w_6, w_6\rangle, \langle w_6, w_5\rangle\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_6\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_2, w_3\rangle, \langle w_3, w_3\rangle, \langle w_3, w_2\rangle, \\ &\quad \langle w_4, w_4\rangle, \langle w_4, w_5\rangle, \langle w_5, w_5\rangle, \langle w_5, w_4\rangle, \langle w_6, w_6\rangle, \langle w_6, w_1\rangle\} \end{aligned}$$

■

La fonction de valuation $V$ indique, pour chaque formule atomique, quels sont les mondes possibles où la formule en question est vraie.

**Example 11** *Nous supposons que la seule formule atomique est $p_0$, et qu'on a deux agents,* 1 *et* 2. *Soit*

$$M = (W, R_1, R_2, V)$$

*le modèle où:*

- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$
- $R_1 = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_3\rangle\}$
- $R_2 = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_3, w_1\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_3\rangle\}$
- $V(p_0) = \{w_1, w_3\}$.

  *Cela veut dire que la formule $p_0$ est vraie dans les mondes $w_1$ et $w_3$.*

**Definition 12** *On fixe un modèle $M = (W, R_1, ..., R_n, V)$ et on définit $M, w \models A$, la formule $A$ est vraie dans le monde $w$ du modèle $M$:*

**1.** $M, w \models p_i \Leftrightarrow w \in V(p_i)$.

**2.** $M, w \models \neg A \Longleftrightarrow$ *il n'est pas le cas que* $M, w \models A$

**3.** $M, w \models (A \vee B) \Longleftrightarrow M, w \models A$ *ou* $M, w \models B$

**4.** $M, w \models (A \wedge B) \Longleftrightarrow M, w \models A$ *et* $M, w \models B$.

**5.** $M, w \models A \rightarrow B \Longleftrightarrow$ *Si* $M, w \models A$ *alors* $M, w \models B$.

**6.** $M, w \models K_i A \iff$ *Pour chaque monde* $v$ *dans* $W$ : *Si* $R_i(w, v)$*, alors* $M, v \models A$.

Donc pour montrer que $K_i A$ est vrai dans un monde $w$, il suffit de considérer un monde arbitraire $v$ tel que $R_i(w, v)$, et de montrer que $A$ est vraie dans $v$. Observons que $K_i A$ est vraie dans $w$ dans tous les cas où il n'y a pas de monde qui est accessible de $w$.

Pour montrer que $K_i A$ n'est pas vraie dans $w$, il suffit de trouver un monde $v$ tel que $R_i(w, v)$ et $A$ n'est pas vraie dans $v$.

**Example 13** *Revenons à l'exemple précédent où le langage contient une seule formule atomique* $p_0$*. On a deux agents,* $1$ *et* $2$*. Le modèle est* $M = (W, R_1, R_2, V)$ *où:*

- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$
- $R_1 = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_3\rangle\}$
- $R_2 = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_3, w_1\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_3\rangle\}$
- $V(p_0) = \{w_1, w_3\}$.

  *Donc:*

$$\begin{array}{ll}
M, w_1 \models p_0 & \textit{car } w_1 \in V(p_0) \\
M, w_3 \models p_0 & \textit{car } w_3 \in V(p_0) \\
M, w_2 \models \neg p_0 & \textit{car il n'est pas le cas que } w_2 \in V(p_0) \\
M, w_1 \models K_2 p_0 & \textit{car } R_2(w_1, w_1),\ R_2(w_1, w_3),\ M, w_1 \models p_0 \textit{ et } M, w_3 \models p_0 \\
M, w_1 \models \neg K_1 p_0 & \textit{car } R_1(w_1, w_2) \textit{ et } M, w_2 \models \neg p_0
\end{array}$$

**Exercise 14** *Montrer que* $M, w_1 \models (p_0 \land \neg K_1 p_0 \land K_2 p_0 \land K_1(K_2 p_0 \lor K_2 \neg p_0) \land \neg K_2 \neg K_1 p_0)$

**Example 15** *Nour reprenons l'exemple des jeux de cartes: 3 cartes* $A, B$ *et* $C$ *et deux joueurs, 1 et 2. On se rappelle les 6 mondes possibles et les relations d'accessibilité* $R_1$ *et* $R_2$*. On considère le langage suivant avec 6 formules atomiques:*

$$\begin{array}{lcl}
p_1^A & : & \textit{1 a la carte A} \\
p_1^B & : & \textit{1 a la carte B} \\
p_1^C & : & \textit{1 a la carte C} \\
p_2^A & : & \textit{2 a la carte A} \\
p_2^B & : & \textit{2 a la carte B} \\
p_2^C & : & \textit{2 a la carte C}
\end{array}$$

*On définit la fonction de valuation $V$:*

$$\begin{array}{rcl} V(p_1^A) & = & \{w_1, w_2\} \\ V(p_1^B) & = & \{w_3, w_4\} \\ V(p_1^C) & = & \{w_5, w_6\} \\ V(p_2^A) & = & \{w_4, w_5\} \\ V(p_2^B) & = & \{w_1, w_6\} \\ V(p_2^C) & = & \{w_2, w_3\} \end{array}$$

*Les 6 mondes possibles, les relations d'accessibilité $R_1$ et $R_2$ et la fonction de valuation $V$ déterminent le modèle $M = (W, R_1, R_2, V)$. On peut maintenant vérifier que:*

$$\begin{array}{ll} M, w_1 \models (p_1^A \wedge p_2^B) & \textit{car } M, w_1 \models p_1^A \textit{ et } M, w_1 \models p_2^B \\ M, w_1 \models K_1(p_2^B \vee p_2^C) & \textit{car } R_1(w_1, w_1), R_1(w_1, w_2), \\ & M, w_1 \models p_2^B \vee p_2^C \textit{ et } M, w_2 \models p_2^B \vee p_2^C \end{array}$$

**Exercise 16** *Montrez que*

$$\begin{array}{l} M, w_1 \models K_2(p_1^A \vee p_1^C) \\ M, w_1 \models K_2 K_2(p_1^A \vee p_1^C) \\ M, w_1 \models K_1 \neg K_2 p_1^A \end{array}$$

## 3.3 La relation d'accessibilité

On fixe un modèle $M = (W, R_1, ..., R_n, V)$. La relation $R_i$ est

- reflexive, si pour chaque $w$ dans $W$ on a $R_i(w, w)$
- irreflexive, si pour chaque $w$ dans $W$, il n'est pas le cas que $R_i(w, w)$
- sériale, si pour chaque $w$ dans $W$ il y a $v$ dans $W$ et $R_i(w, v)$
- symmétrique, si pour tous $w, v$ dans $W$: Si $R_i(w, v)$, alors $R_i(v, w)$
- euclidienne, si pour tous $w_1, w_2, w_3$ dans $W$: Si $R_i(w_1, w_2)$ et $R_i(w_1, w_3)$, alors $R_i(w_2, w_3)$
- transitive, si pour tous $w_1, w_2, w_3$ dans $W$: Si $R_i(w_1, w_2)$ et $R_i(w_2, w_3)$, alors $R_i(w_1, w_3)$
- relation d'équivalence, si $R_i$ est reflexive, transitive et symmétrique.

**Exercise 17** *Montrez qu'une relation $R$ est une relation d'équivalence si et seulement si, $R$ est réflexive et euclidienne.*

**Example 18** *Soit $M = (W, R_1, V)$ un modèle pour un langage modal qui a un seul symbole propositionnel, $p_0$*

- $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
- $R_1 = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_2, w_3\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \langle w_4, w_2\rangle\}$
- $V(p_0) = \{w_2, w_3\}$.

  *D'abord on observe que la relation $R_1$ est sériale mais elle n'est pas réflexive, car il n'est pas le cas que $R_1(w_3, w_3)$ ni $R_1(w_4, w_4)$*

  *La relation $R_1$ n'est pas transitive, car on a $R_1(w_2, w_3)$, $R_1(w_3, w_4)$ mais il n'est pas le cas que $R_1(w_2, w_4)$*

  *On a*

$$\begin{array}{l} M, w_1 \models K_1p_0 \to p_0 \\ M, w_2 \models K_1p_0 \to p_0 \\ M, w_3 \models K_1p_0 \to p_0, \\ M, w_4 \not\models K_1p_0 \to p_0, \textit{ car } M, w_4 \models K_1p_0, \textit{ mais } M, w_4 \not\models p_0 \end{array}$$

  *Nous observons que $K_1p_0 \to p_0$ est vraie dans chaque monde $w$ tel que $R_1(w, w)$.*

Fixons un modèle $M = (W, R_1, ..., R_n, V)$. Pour le moment, il suffit de considérer seulement le cas où $n = 1$, c.–d. $M = (W, R_1, V)$.

**Definition 19** *Soit $M = (W, R_1, V)$*

**1.** *La formule $A$ est vraie dans le modèle $M$, $M \models A$, si $M, w \models A$ pour chaque monde $w$ dans $W$.*

**2.** *Soit $C$ une collection (classe) de modèles. La formule $A$ est valide dans $C$ si $M \models A$ pour chaque modèle $M$ dans $C$.*

**Example 20** *Soit $M = (W, R_1, V)$ un modèle, où $W$ et $R_1$ sont comme dans l'exemple précédent, mais $V(p_0) = \varnothing$. On a*

$$\begin{array}{l} M_1, w_1 \models \neg p_0 \\ M_1, w_2 \models \neg p_0 \\ M_1, w_3 \models \neg p_0 \end{array}$$

*donc $\neg p_0$ est vraie dans le modèle $M$, $M \models \neg p_0$.*

**Example 21** *Pour toutes les formules $A$, $B$, la formule $[K_1A \wedge K_1(A \to B)] \to K_1B$ est valide dans la classe de tous les modèles.*

*Soit $M = (W, R_1, V)$ un modèle arbitraire, et $w$ un monde arbitraire dans $W$. Fixons deux formules $A$ et $B$. On va montrer que*

$$M, w \models [K_1A \wedge K_1(A \to B)] \to K_1B$$

*Supposons que*

$$M, w \models [K_1A \wedge K_1(A \to B)]$$

*Donc*

$$\text{a) } K_1A$$
$$\text{b) } K_1(A \to B)$$

*qui sont equivalents à*

> *a*)* $M, v \models A$ *dans chaque monde* $v$ *tel que* $R_1(w, v)$
> *et respectivement*
> *b*)* $M, t \models A \to B$ *dans chaque monde* $t$ *tel que* $R_1(w, t)$

*Afin de montrer* $M, w \models K_1B$*, soit* $r$ *dans* $W$ *tel que*

$$R_1(w, r)$$

*Par a*):*

$$M, r \models A$$

*Par b*):*

$$M, r \models A \to B$$

*Donc (par la logique)*

$$M, r \models B$$

*et on conclut*

$$M, w \models K_1B.$$

**Exercise 22** *Montrez que le schéma* $K_1A \to A$ *est valide dans la classe des modèles* $M = (W, R_1, V)$ *où la relation* $R_1$ *est réflexive.*

**Exercise 23** *Montrez que le schéma* $K_1A \to K_1K_1A$ *est valide dans la classe des modèles* $M = (W, R_1, V)$ *où la relation* $R_1$ *est transitive.*

**Exercise 24** *Montrez que le schéma* $\neg K_1A \to K_1\neg K_1A$ *est valide dans la classe des modèles* $M = (W, R_1, V)$ *où la relation* $R_1$ *est euclidienne.*