Exercice logique de la connaissance.

Clément Aubert

2 septembre 2008

Rappel de l'énoncé : Deux joueurs, nommés 1 et 2, se distribuent trois cartes, désignées par A, B, et C. Chaque joueur reçoit une carte, la carte restante reste sur la table, face cachée. Les mondes possibles sont écrits comme des couples <carte du joueur 1, carte du joueur 2>, et symbolisés par w_i, i étant compris entre 1 et 6. Les mondes accessibles au joueur 1 sont décrits par la relation R_1, ceux du joueur 2 par la relation R_2.

Formellement on a donc $\mathcal{M} = (W; R_1, R_2; V)$
$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$

$$\begin{array}{ll}
w_1 = \langle A, B\rangle & \text{1 a la carte } A\text{, 2 a la carte } B \\
w_2 = \langle A, C\rangle & \text{1 a la carte } A\text{, 2 a la carte } C \\
w_3 = \langle B, C\rangle & \text{1 a la carte } B\text{, 2 a la carte } C \\
w_4 = \langle B, A\rangle & \text{1 a la carte } B\text{, 2 a la carte } A \\
w_5 = \langle C, A\rangle & \text{1 a la carte } C\text{, 2 a la carte } A \\
w_6 = \langle C, B\rangle & \text{1 a la carte } C\text{, 2 a la carte } B
\end{array}$$

Voici une description complète des deux relations d'accessibilité :

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle, \langle w_3, w_3\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \\
&\quad \langle w_4, w_4\rangle, \langle w_4, w_3\rangle, \langle w_5, w_5\rangle, \langle w_5, w_6\rangle, \langle w_6, w_6\rangle, \langle w_6, w_5\rangle\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 &= \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_6\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_2, w_3\rangle, \langle w_3, w_3\rangle, \langle w_3, w_2\rangle, \\
&\quad \langle w_4, w_4\rangle, \langle w_4, w_5\rangle, \langle w_5, w_5\rangle, \langle w_5, w_4\rangle, \langle w_6, w_6\rangle, \langle w_6, w_1\rangle\}
\end{aligned}$$

La fonction de valuation V est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
V(p_1^A) &= \{w_1, w_2\} \\
V(p_1^B) &= \{w_3, w_4\} \\
V(p_1^C) &= \{w_5, w_6\} \\
V(p_2^A) &= \{w_4, w_5\} \\
V(p_2^B) &= \{w_1, w_6\} \\
V(p_2^C) &= \{w_2, w_3\}
\end{aligned}$$

Questions :

Démontrez que l'on a :

1. $\mathcal{M}, w_1 \models K_1(p_1^A)$
2. $\mathcal{M}, w_1 \models K_2(p_2^B)$
3. $\mathcal{M}, w_1 \models K_1(p_2^B \vee p_2^C)$
4. $\mathcal{M}, w_1 \models \neg K_1(p_2^B)$
5. $\mathcal{M}, w_1 \models K_1(\neg K_2(p_1^A))$
6. $\mathcal{M}, w_1 \models K_2(K_2(p_1^A \vee p_1^C))$

Réponses :
On considère $\mathcal{M} = (W; R_1, R_2; V)$ comme précédemment, et on prendra à chaque fois w et p des mondes de W.

1. $\mathcal{M}, w_1 \vDash K_1(p_1^A) \iff$ Pour chaque monde w dans W : Si $R_1(w_1, w)$ alors $\mathcal{M}, w \vDash p_1^A$.
   On a $R_1(w_1, w_1)$ et $R_1(w_1, w_2)$.
   On doit donc montrer que $\mathcal{M}, w_1 \vDash p_1^A$ et $\mathcal{M}, w_2 \vDash p_1^A$, ce qui revient à montrer que $w_1 \in V(p_1^A)$ et $w_2 \in V(p_1^A)$.
   Comme $V(p_1^A) = \{w_1, w_2\}$, on obtient le résultat désiré : $\mathcal{M}, w_1 \vDash K_1 p_1^A$.

2. $\mathcal{M}, w_1 \vDash K_2(p_2^B) \iff \forall w[(R_2(w_1, w)), \mathcal{M}, w \vDash p_2^B]$.
   C'est à dire que le joueur 2 sait qu'il a la carte B dans le monde w_1 si et seulement si tous les mondes en relation avec w_1 par R_2 ont pour $V(p_2^B)$ la valeur 1, autrement dit, appartiennent à cet ensemble.
   Or $R_2(w_1, w_1)$ et $\mathcal{M}, w_1 \vDash p_2^B$
   et $R_2(w_1, w_6)$ et $\mathcal{M}, w_6 \vDash p_2^B$.
   Ces mondes sont les seuls en relation avec w_1 par R_2 : les seuls auxquels le joueur 2 a accès depuis le monde w_1.
   Ainsi, $w_1 \in V(p_2^B)$ et $w_6 \in V(p_2^B)$, et on peut donc légitimement affirmer $\mathcal{M}, w_1 \vDash K_2(p_2^B)$.

3. On nous demande de démontrer, dans le monde w_1, que le joueur 1 sait que le joueur 2 a soit la carte B, soit la carte C. Formellement : $\mathcal{M}, w_1 \vDash K_1(p_2^B \vee p_2^C)$.
   Ce qui est évident intuitivement se démontre logiquement de la façon suivante :
   Il faut que dans tous les mondes accessibles au joueur 1 depuis w_1, le joueur 2 ait soit la carte C, soit la carte B.
   $\mathcal{M}, w_1 \vDash p_2^B$, autrement dit, $w_1 \in V(p_2^B)$ donc $\mathcal{M}, w_1 \vDash (p_2^B \vee p_2^C)$, car $\vDash (p_2^B \vee p_2^C)$ est démontré si et seulement si on a $\vDash (p_2^B)$ ou $\vDash (p_2^C)$. Cette condition est ici remplie.
   De même : $\mathcal{M}, w_2 \vDash p_2^C$ donc $\mathcal{M}, w_2 \vDash (p_2^B \vee p_2^C)$
   On a donc bien $\mathcal{M}, w_1 \vDash K_1(p_2^B \vee p_2^C)$.

4. $\mathcal{M}, w_1 \vDash \neg K_1(p_2^B) \iff \forall w[(R_1(w_1, w)), \mathcal{M}, w \nvDash p_2^B]$.
   Autrement dit, dans le monde où le joueur 1 a la carte A et le joueur 2 la carte B, le joueur 1 ne sait pas que le joueur 2 a la carte B. Cela est vérifié par le fait que tous les mondes auxquels peut accéder le joueur 1 depuis w_1 ne vérifient pas que le joueur 2 a la carte B :
   On a $\exists w[(R_1(w_1), w), \mathcal{M}, w \nvDash p_2^B]$, c'est à dire qu'il existe un monde accessible depuis w_1 par la relation R_1 où p_2^B n'est pas vérifié, et ce monde est w_2.
   Le joueur 1 ne sait donc pas, dans le monde w_1 que le joueur 2 a la carte B.

5. $\mathcal{M}, w_1 \vDash K_1(\neg K_2(p_1^A)) \iff \forall w[(R_1(w_1, w)), \mathcal{M}, w, \nvDash K_2 P_1^A]$
$\iff \forall p[\forall w(R_1(w_1, w)), R_2(w, p), \mathcal{M}, p \nvDash p_1^A]$
Si on lit cette relation, on a : le joueur 1 sait que le joueur 2 ne sait pas qu'il a la carte A dans le monde w_1 **si et seulement si** tous les mondes accessibles au joueur 1 depuis w_1 ne vérifient pas le fait que 2 sache que le joueur 1 a la carte A. C'est à dire que les mondes en relations par R_2 avec les mondes en relation par R_1 avec w_1 ne vérifient pas tous que le joueur 1 a la carte A. On voit ici la commodité du langage formel par rapport à la langue naturelle.
w_1 est en relation par R_1 avec w_2 et lui-même.
Et on a $R_2\{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_6\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_2, w_3\rangle$
Il est facile de trouver dans cette liste un monde qui ne satisfait pas p_1^A : c'est le cas de w_3 et de w_6.
On peut donc écrire : $\mathcal{M}, w_6 \nvDash p_1^A$ et $\mathcal{M}, w_3 \nvDash p_1^A$
On conclut : dans le monde w_1, le joueur 1 sait que le joueur 2 ne sait pas qu'il a la carte A. C'est d'ailleurs tout l'interêt du jeu...

6. $\mathcal{M}, w_1 \vDash K_2(K_2(p_1^A \vee p_1^C))$, c'est-à-dire que dans le monde w_1, le joueur 2 sait qu'il sait que le joueur 1 a la carte A ou la carte C.
On le démontre en prouvant que les mondes accessibles au joueur 2 depuis les mondes accessibles depuis w_1 au joueur 2 vérifient que le joueur 1 a la carte A ou la carte C.
Les mondes w_1 et w_6 sont accessibles depuis w_1 par R_2. Les mondes accessibles depuis w_1 ou w_6 par R_2 sont w_1 et w_6, et aucun autre.
Or $w_1 \in V(p_1^A)$ et $w_6 \in V(p_1^C)$, donc $\mathcal{M}, w_1, w_2 \vDash (p_1^A \vee p_1^C)$
On a bien vérifié que $\mathcal{M}, w_1 \vDash K_2(K_2(p_1^A \vee p_1^C))$.