”Les enfants boueux”

Il s'agit de n enfants qui jouent ensemble. Chacun voit la boue sur le front des autres mais par sur le sien.

À la fin, k enfants ont de la boue sur le front.

Le père arrive et dit: *Au moins l'un d'entre vous a de la boue sur le front.*

Ensuite il exige que ceux qui ont de la boue sur le front le dise.

Il exige cela indéfiniment.

On suppose que k enfants ont de la boue sur le front.

Il y a une ”preuve” par induction du fait suivant : les premières $k-1$ fois que le père exige que ceux qui sont boueux se dénoncent, aucun ne va se dénoncer. Mais la $k^{ème}$ fois que le père l'exige, les k enfants qui ont de la boue sur le front se dénoncent.

- $k = 1$. Le résultat est évident. Le seul enfant qui a de la boue voit que tous les autres enfants sont propres, et il se dénonce.

- $k = 2$. Il a donc deux enfants, a et b qui ont de la boue. Chacun reste muet la première fois que le père demande que les boueux se livrent (chacun a vu que l'autre a de la boue, et donc il ne pouvait pas être sûr qu'il a lui même de la boue). Mais après que b soit resté muet la 1ère fois, a se rend compte qu'il doit avoir de la boue (car autrement b aurait répondu *moi* la 1ère fois!). Donc a va répondre *moi* la 2ème fois. Le raisonnement de b est analogue.

- $k = 3$. Il y a trois enfants qui ont de la boue, a, b, c. a raisonne de la façon suivante : *Supposons que je n'ai pas de boue sur le front. Par le cas $k = 2$, b et c aurait du répondre* nous *la 2ème fois. Mais ils sont restés muets, donc j'ai de la boue.* b et c raisonnent d'une façon similaire.

L'argument dans le cas général est analogue.

Soit p l'énoncé *”Au moins l'un d'entre vous a de la boue sur le front”*.

On observe que si $k > 1$, chaque enfant sait que p : même s'il a lui- même de la boue sur le front, il voit au moins un autre enfant qui en a également. Il semble donc que le père leur ait dit quelque chose que chacun d'entre eux savait. Mais cela est faux! En fait, si le père n'annonce pas p, les enfants qui sont boueux ne seront pas capables de conclure qu'ils sont boueux.

Il est vrai que chacun sait que p avant que le père parle. Mais chacun ne sait pas que chacun sait que p avant que le père ne parle. Après que le père ait parlé, a sait que b sait que p. Après que b soit resté muet à la première exigence du père, a emploie le fait qu'il sait que b sait que p, pour conclure qu'il a de la boue sur le front.