Clément Aubert

17 janvier 2009

Table des matières

Remarque 1 *Les connecteurs sont interdéfinissables :*
- $A \leftrightarrow B \iff (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $\neg A \iff A \rightarrow \perp$
- $A \rightarrow B \iff \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \vee B \iff \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $\Diamond A \iff \neg\Box\neg A$ *C'est-à-dire qu'il est possible que A équivaut à il n'est pas obligatoire que A ne soit pas le cas.*

Il s'agit ici de se demander dans quelles cas une proposition A du langage $\mathcal{L}$ est $vraie$ ou $fausse$. Cette valeur de vérité de la proposition dépend des valeurs des éléments qui la composent.

0.0.1 Les valeurs de vérité

A. Tarski a le premier défini une table des valeurs de vérités (cf. fig. 1.1).
V signifie que la proposition est $vraie$, F qu'elle est $fausse$.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

FIG. 1 – La table de vérité

Les deux premières colonnes dans la fig. 1.1 *distribuent* les différentes valeurs de vérité possibles entre A et B, les autres colonnes sont des règles à apprendre et à comprendre.

De même, on a :

Les opérateurs modaux n'ont pas toutes leurs valeurs de vérité définies par le simple fait que A soit $vraie$ ou $fausse$ dans un seul cas, dans un seul monde, comme on le verra au chapitre suivant.
- Si A est $vraie$, on peut en conclure que $\Diamond A$ est $vraie$.
- Mais si A est $fausse$, on ne peut pas en conclure que A n'est pas possible.
- Si A est $fausse$, on en déduit que $\Box A$ est $fausse$.
- Mais si A est $vraie$, on ne peut pas en conclure que A est obligatoire.

A	$\Diamond A$	$\Box A$
V	V	$?$
F	$?$	F

FIG. 2 – Les cas particuliers de $\Diamond$ et de $\Box$

Pour avoir l'ensemble des valeurs de vérité des opérateurs $\Diamond$ et $\Box$, il faut traiter l'ensemble des mondes possibles, ce qui est rendu possible par la construction d'un modèle du langage.

Remarques 2 *-$W \neq \emptyset$, c'est-à-dire que W contient toujours au moins un monde.*
-Formellement : $P : \{p_0, p_1, ...\} \rightarrow \mathcal{P}(W)$. Soit : P est la fonction qui associe à un ensemble d'atomes propositionnels un ensemble de mondes de W. La fonction notée $\mathcal{P}$ associe l'ensemble W des mondes à une partie d'entre eux.

Définition 3 *Les symboles $\in, \forall, \exists$:*

- *$w \in P(p_i)$ signifie que le monde w fait partie de l'ensemble des mondes que renvoit la fonction P appliquée à p_i. Autrement dit, p_i est le cas dans w.*
- *$\forall w' \in W$ signifie : Pour tout monde w' de W.*
- *$\exists w' \in W$ signifie : Pour au moins un monde w' de W.*