Mémoire de M1 de Philosophie
Option Lo.P.Hi.S.S., parcours Logique
Année 2008-2009, session de Septembre.

Clément Aubert,
sous la direction de M. Joinet.

L'élimination des coupures dans la Logique des Domaines Constants

Introduction

Le schéma de formule (D),

$$\forall x\ (\psi(x) \vee \varphi) \rightarrow \forall x\ \psi(x) \vee \varphi, \text{ où } x \text{ n'apparaît pas dans } \varphi$$

fût étudié dès la seconde moitié du $XX^{\text{ème}}$ siècle, notamment par Mostowski et Umezawa. Le premier a démontré en s'appuyant sur les treillis de Brouwer dans [Mostowski(1948)] que la logique intuitionniste ne pouvait pas dériver ce schéma. Le second a hiérarchisé les pouvoirs expressifs de systèmes constitués du système **LJ'** enrichi de différents schémas – dont (D) – dans [**?**].

La logique des domaines constants est découverte comme par erreur dans [Grzegorczyk(1964)]. Cet article entendait proposer une sémantique pour la logique des prédicats intuitionniste, mais elle s'est avérée inadéquate, puisqu'elle rendait vraie le schéma (D). [Gabbay(1969)] établit qu'en contraignant un modèle de Kripke à avoir un domaine constant, il valide le schéma (D), et invente ainsi la logique **CD**, qui naît donc d'une manipulation sémantique. La question de savoir si ce système accepte une axiomatique complète et correcte est rapidement tranchée (par exemple dans [Gornemann(1971)] ou [Nagashima(1973)]), mais le problème de sa normalisation semble s'être posé jusqu'à assez récemment.

Il exsite une formulation de **CD** comme système de dérivation de séquents, **LD**, qui n'est rien d'autre que **LK** avec les règles de **LJ** pour $\rightarrow_d$ et $\neg_d$. Nagashima nomme ce système **C1** et démontre que le théorème d'élimination des coupures ne peut pas s'y appliquer [1]. Il utilise pour cela une preuve avec coupure du séquent σ :

$$\forall x\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x\ \varphi(x) \vee \forall x\ \psi(x)$$

La question de savoir s'il existe un système de dérivations des séquents pour **CD** qui accepte le théorème d'élimination des coupures semble être

1. La preuve complète se trouve dans l'article cité, page 55.

restée ouverte jusqu'à [Kashima(1991)]. L'auteur y propose une extension non-standard de **LD**, qu'il nomme **c-LD**, et y démontre le théorème d'élimination des coupures. Il reprendra ce système, avec quelques modifications, dans [R. Kashima et T. Shimura(1994)], et Shimura en tira plusieurs conclusions concernant **LD**.

La perspective d'obtenir un algorithme d'élimination des coupures pour un système qui résistait jusqu'ici mérite à lui seul que l'on se penche sur cette découverte. Ce sujet peut également ouvrir des pistes dans l'interprétation de la normalisation dans un sens calculatoire, dans le cadre de la correspondance entre preuves et programmes. C'est le système de Kashima, malgré sa lourdeur, que l'on va présenter ici et pour lequel on va démontrer l'élimination des coupures. Le procédé d'élimination des coupures souffre certes de nombreux défauts, mais il a au moins le mérite d'exister, et cette présentation permettra, on l'espère, de développer de nouvelles pistes dans le plongement de **CD** dans la logique linéaire.

Nomenclature

Convention 1. On emploie une nomenclature répandue, que l'on précise tout de même ici :

- Les formules sont désignées par les symboles φ, ψ, χ, ϕ, ξ.
- Les multi-ensembles de formules, possiblement vides, sont notés Γ, Δ, Θ.
- Les termes sont désignés par les lettres s et t.
- Les variables (libres ou liées) sont désignées par w, x, y, z.
- Un séquent est un couple noté $\Gamma \vdash \Delta$, on le désigne avec la lettre σ.
- On désigne les preuves (peu importe le système pour l'instant) avec les lettres π et ϖ.

On s'autorisera, autant de fois que nécessaire, à indicer ces notations avec des symboles ($'$, $*$, $\star$ et $^+$), des lettres et des entiers : π_g^+, Δ_0', s'', $x*$, x_1, σ_2^*, $\pi_d^\star$, etc.

Convention 2. Soit la dernière règle d'une preuve π, par exemple du séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', (\varphi \wedge \psi)$:

$$\pi \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots\, \pi_g & \vdots\, \pi_d \\ \Gamma \vdash \Delta, \varphi & \Gamma' \vdash \Delta', \psi \end{array}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', (\varphi \wedge \psi)} \wedge_d \end{array} \right.$$

- $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ est le séquent prémisse gauche de la règle et il est conclusion de la preuve π_g. $\Gamma' \vdash \Delta', \psi$ est le séquent prémisse droite de la règle et $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', (\varphi \wedge \psi)$ est son séquent conclusion.
- Le nom de la règle est indiqué à droite ou à gauche du trait d'inférence ; ici il s'agit d'une application de la règle $\wedge_d$.
- On parle des deux côtés du séquent, définis par rapport au signe $\vdash$: dans le séquent conclusion de π, Γ et Γ' sont à gauche, Δ, Δ' et $(\varphi \wedge \psi)$ sont à droite.
- Γ est l'hypothèse du séquent prémisse gauche ; Δ', ψ est le conséquent du séquent prémisse droit.
- On notera, sauf mention contraire, σ le séquent conclusion de π, σ_d le séquent conclusion de π_d, etc.

On rappelle l'existence de plusieurs systèmes de calcul des séquent :

- **LK** (resp. **LJ**) est la formulation de la Déduction Naturelle Classique (resp. Intuitionniste) comme système de dérivation de séquents. Il en existe plusieurs variantes, qui ont toutes le même pouvoir expressif.
- **LJ'** est un système de calcul des séquents multi-concluions au même pouvoir expressif que **LJ**[2]. Il s'agit de **LK** doté des règles de **LJ** pour $\neg_d$, $\rightarrow_d$ et $\forall_d$.
- **LD** est une formulation de **CD** comme système de dérivation de séquents. Il s'agit de **LJ'** munie de la règle de **LK** pour $\forall_d$.

Présentation de LDC

On étudie le calcul des séquents bilatéral hétérostyle ayant le même pouvoir expressif que la logique des domaines constants. Nous reprenons principalement le système de Kashima, qu'il nomme **c-LD** dans son rapport de recherche, et **CLD** dans son article[3]. Nous nous sommes permis de franciser le nom de ce système en **LDC**, pour ***L**ogique des **D**omaines **C**onstants*.

Ce système est une extension non-standard de **LD**, puisqu'on y ajoute une notion de « connexions », de « liens », que l'on définit immédiatement :

Définition 1 (Connexions entre formules)**.** Pour chaque séquent, on définit une relation binaire entre les occurrences de formules dans l'antécédent et les occurrences de formules dans le conséquent de ce séquent. On la note $\sim$, on la nomme connexion ou lien, et c'est une relation symétrique. Si deux formules ne sont pas connectées, on emploie le symbole $\nsim$. Deux occurrences de formules du même côté du signe $\vdash$ ne peuvent pas être connectées, les liens n'existent donc qu'entre occurrences de part et d'autre de $\vdash$ dans un séquent.

Remarque 1. Par un léger abus, on continue à noter identiquement une relation de connexion entre multi-ensembles présents de part et d'autre de $\vdash$ dans un séquent : les multi-ensembles de formules Γ et Δ sont connectés – on note alors $\Gamma \sim \Delta$ – si et seulement si il existe au moins une formule $\varphi \in \Gamma$, une formule $\psi \in \Delta$ et que ces deux occurrences sont connectées. De même $\Theta \nsim \Gamma \cup \Delta$ si et seulement si Θ n'est connecté à aucune formule de Γ ou de Δ.

Définition 2. On dit que les connexions entre deux multi-ensembles de formules non-vides Γ et Δ sont **inchangées** lors de l'application d'une règle lorsque les connexions entre les formules de Γ et celles de Δ sont les mêmes dans le séquent prémisse et dans le séquent conclusion de ladite règle.

Remarque 2. **LDC** n'admet pas le connecteur $\neg$, contrairement à **LD**. Les règles de **LDC** varient donc par rapport à celles de **LD** sur trois points : l'introduction de ces « liens », la règle $\rightarrow_d$, et le fait qu'il ne soit pas possible en **LDC** que la conclusion d'un séquent soit vide. **LD** n'accepte la règle

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow_d$$

2. Résultat prouvé la première fois dans [Maehara(1954)].
3. Ces systèmes ne sont pas exactement identiques, puisqu'ils different sur la règle de l'affaiblissement. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point en conclusion, page 26.

que si Δ est vide, ce qui n'est pas le cas de **LDC**. Le système ne devient pas pour autant équivalent à **LK** grâce à une contrainte sur les liens que l'on exposera dans la figure 1 page 6. Puisque **LDC** n'accepte pas les séquents vides, ces systèmes varient sur la règle efq : **LD** admet comme axiome $\overline{\perp \vdash}$. **LDC** a pour efq $\overline{\perp \vdash \varphi}$, pour une formule φ quelconque, avec $\perp \sim \varphi$. Kashima dit ne pas accepter en **LDC** l'axiome $\overline{\perp \vdash}$ pour des « raisons techniques »[4] qu'il ne nous a pas été possible d'identifier. Nous conservons ce choix, par prudence, mais y reviendrons en conclusion, page 26.

Définition 3 (Occurrences de formules principales, actives, passives)**.** On distingue lors de l'application d'une règle r trois types d'occurrences de formules. On a pour $c \in \{g, d\}$:

- Une occurrence d'une formule est **principale** dans r si et seulement si :
  - $r = \wedge_c, \vee_c, \rightarrow_c, \forall_c$ ou $\exists_c$ et cette occurrence porte le connecteur qui vient d'être introduit par r,
  - $r = ax$ et cette occurrence est l'une des deux occurrences introduites,
  - $r = efq$ et cette occurrence est $\perp$ ou la formule introduite à droite de $\vdash$,
  - $r = aff_c$ et cette occurrence est la formule introduite,
  - $r = ctr_c$ et cette occurrence est l'occurrence résultant de la contraction.
- Une occurrence d'une formule est **active** dans r si et seulement si :
  - $r = cut$ et cette occurrence est l'une des occurrences supprimées (on dit par ailleurs de cette formule que c'est la formule de coupure de r),
  - $r = \wedge_c, \vee_c, \rightarrow_c, \forall_c$ ou $\exists_c$ et cette occurrence devient sous-formule de la principale de r,
  - $r = ctr_c$ et cette occurrence est l'une des occurrences contractées.
- Toute occurrence d'une formule qui n'est ni principale ni active dans r est **passive**. On appelle contexte le multi-ensemble des occurrences de formules passives dans l'application d'une règle.

Remarque 3. Toute occurrence d'une formule principale (resp. active) dans r est dans le séquent conclusion (resp. prémisse) de r.

Définition 4. Lors de l'application d'une règle r, pour $c \in \{d, g\}$:

- les connexions entre les occurrences des formules passives dans r sont inchangées,
- si $r = ax$ ou $r = efq$, les formules introduites sont liées,
- la formule principale de r hérite des connexions des formules actives de r si elles existent et si c'est possible,
- si r est binaire, les formules passives des deux séquents prémisses n'ont pas de liens entre elles (exception faite de $\rightarrow_g$ et de cut),
- si $r = aff_c$, on peut choisir de lier la formule introduite par r à un nombre arbitraire de formules de l'autre côté du signe $\vdash$[5].

Remarque 4. Aucune règle non 0-aire de **LCD** ne requiert que des connexions existent dans ses séquents prémisses. Par contre la règle $\rightarrow_d$ impose qu'un lien n'existe pas.

4. Research Report, page 15.
5. Les deux textes de Kashima varient sur ce point, mais nous choisissons d'adopter, pour le moment, ce système plus « souple ». Nous y reviendrons en conclusion, page 26.

Définition 5. Une preuve en **LDC** est un arbre à branchements 0-, 1- et 2-aires, inductivement construit par application des règles de la figure 1 page suivante. Dans cette figure, on a encadré les contraintes sur les variables et les règles concernant les liens qui ne sont pas explicites dans la définition 4. La hauteur d'une branche est le nombre de règles d'arité supérieure à 0 qu'elle rencontre. La hauteur d'une preuve π, notée $\mid \pi \mid$, est égale au *max.* des hauteurs de ses branches.

Remarque 5. On peut remarquer que les seules règles réversibles de **LCD** sont $\rightarrow_d$, $\forall_d$ et $\exists_g$. Les deux seules règles additives sont $\wedge_g$ et $\vee_d$. Une occurrence ne change de côté qu'après application d'une règle $\rightarrow_d$ ou $\rightarrow_g$.

Remarque 6. On signalera graphiquement le fait que l'on applique plusieurs fois la même règle par des doubles lignes en pointillés. Cela nous sera utile dans les cas où l'on veut contracter ou introduire par affaiblissements des multi-ensembles ou plusieurs occurrences d'une même formule :

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,ax}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\,aff_g \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \vdash \varphi\end{matrix}}{\Gamma \vdash \varphi, \ldots, \varphi}\,aff_d \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \vdash \Delta, \Delta\end{matrix}}{\Gamma \vdash \Delta}\,ctr_d \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma, \varphi, \ldots, \varphi \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}\,ctr_g$$

Théorème 1. *Soit π une preuve en* ***LD*** *du séquent $\sigma : \Gamma \vdash \Delta$. Il existe une preuve ϖ en* ***LDC*** *du séquent avec connexions $\sigma' : \Gamma \vdash \Delta'$, où :*
- *$\Delta' = \Delta$ si Δ n'est pas vide,*
- *$\Delta' = \bot$ si Δ est vide.*

Démonstration. On le démontre par induction sur $\mid \pi \mid$, en raisonnant par cas sur la dernière règle de π.

Si $\mid \pi \mid = 0$, la dernière règle de π peut être un efq. Dans ce cas, la preuve ϖ recherchée est simplement un axiome introduisant $\bot$. Si la dernière règle de π est un axiome, ϖ est le même axiome.

Sinon, on suppose le théorème démontré pour les preuves de hauteur i (avec $i \leq n$), et on le montre pour $n+1$. On n'étudie que le cas significatif, c'est-à-dire lorsque la dernière règle de π est une application de $\rightarrow_g$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi_g\\ \Gamma \vdash \Delta, \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_g\ \vdots\\ \psi, \Gamma' \vdash\end{matrix}}{(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}\,\rightarrow_g$$

Par hypothèse d'induction il existe des preuves en **LDC** ϖ_g de $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ et ϖ_d de $\psi, \Gamma' \vdash \bot$ avec certaines connexions, et on obtient la preuve recherchée ainsi (pour $\xi \in \Delta$) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \varpi_g\\ \Gamma \vdash \Delta, \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\varpi_d\ \vdots\\ \psi, \Gamma' \vdash \bot\end{matrix}}{(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma, \Gamma' \vdash \bot, \Delta}\,\rightarrow_g \qquad \dfrac{\dfrac{}{\bot \vdash \xi}\,efq}{\bot \vdash \Delta}\,aff_d}{(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta}\,Cut}{(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}\,ctr_d$$

Axiomes

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\; ax \qquad\qquad \frac{}{\bot \vdash \varphi}\; efq$$

Groupe structurel

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\; aff_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\; aff_d$$

Contraction

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\; ctr_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\; ctr_d$$

Groupe logique

Conjonction

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{(\varphi \wedge \psi), \Gamma \vdash \Delta}\; \wedge_g^1$$

$$\frac{\psi, \Gamma \vdash \Delta}{(\varphi \wedge \psi), \Gamma \vdash \Delta}\; \wedge_g^2$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma' \vdash \Delta', \psi}{\Gamma, \Gamma', \vdash \Delta, \Delta', (\varphi \wedge \psi)}\; \wedge_d$$

Disjonction

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta \qquad \psi, \Gamma' \vdash \Delta'}{(\varphi \vee \psi), \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\; \vee_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, (\varphi \vee \psi)}\; \vee_d^1$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, (\varphi \vee \psi)}\; \vee_d^2$$

Implication

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma' \vdash \Delta'}{(\varphi \to \psi), \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\; \to_g \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, (\varphi \to \psi)}\; \to_d$$

$$\boxed{\Gamma \sim \Delta' \text{ ssi } (\Gamma \sim \varphi \text{ et } \psi \sim \Delta')} \qquad\qquad \boxed{\varphi \nsim \Delta}$$

Quantificateurs

Quantificateur universel

$$\frac{\varphi[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \vdash \Delta}\; \forall_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\; \forall_d$$

$$\boxed{x \notin Var_{lib}(\Gamma \cup \Delta)}$$

Quantificateur existentiel

$$\frac{\varphi(x), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma \vdash \Delta}\; \exists_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\, \varphi}\; \exists_d$$

$$\boxed{x \notin Var_{lib}(\Gamma \cup \Delta)}$$

Cut

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\; \text{Cut} \qquad\qquad \boxed{\Gamma \sim \Delta' \text{ ssi } (\Gamma \sim \varphi \text{ et } \varphi \sim \Delta')}$$

FIGURE 1: Les règles de **LCD**

Si Δ est vide, appliquer $\rightarrow_g$ aux séquents conclusions de ϖ_d et ϖ_d suffit pour obtenir la preuve recherchée.

La preuve à la converse de ce théorème peut être retrouvée dans le rapport de recherche de Kashima, à la page 45.

Remarque 7. Dans le cas de efq, $\dfrac{}{\bot \vdash \varphi}\text{efq}$, on suppose $\varphi \neq \bot$. On ne perd pas de pouvoir expressif car le séquent $\bot \vdash \bot$, où $\bot \sim \bot$, s'obtient par la règle ax introduisant $\bot$.

Convention 3. On note $\sigma[x/t]$ le séquent résultant du remplacement dans le séquent σ des occurences libres de x par le terme t.

Remarque 8. Soit π une preuve du séquent σ en **LDC**, x une variable et t un terme. Il existe une preuve $\pi[x/t]$ – qui a la même structure que π – de $\sigma[x/t]$, à savoir une preuve de σ où toutes les occurrences libres de x dans σ ont été remplacées par des occurrences de t. Les liens dans les séquents conclusions de π et de $\pi[x/t]$ sont les mêmes. On s'asure au besoin qu'il n'y a pas de capture de variables libres par un « renommage cohérent » [6] du séquent σ.

Remarque 9 (Perte de connexions). Une occurrence d'une formule qui est liée à son contexte ne peut apparaître comme occurrence ou sous-formule d'une occurrence d'une formule libre de connexions après application d'une règle d'inférence que si cette règle est $\rightarrow_g$, $\rightarrow_d$ ou *Cut*.
Dans le cas de $\rightarrow_g$:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma' \vdash \Delta'}{(\varphi \rightarrow \psi), \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \rightarrow_g$$

Si $\psi \nsim \Delta'$ et $\Gamma \nsim \Delta$, alors Γ peut être lié à φ en prémisse et libre de connexions en conclusion.

Si $\psi \nsim \Delta'$, alors bien que $\varphi \sim \Gamma$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ n'est plus connecté à aucune formule.

Dans le cas de $\rightarrow_d$:

$$\dfrac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow_d$$

Si $\psi \nsim \Gamma$, alors bien que $\varphi \sim \psi$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ n'est plus connecté à aucune formule.

Dans le cas de *Cut* :

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \textit{Cut}$$

Si $\Gamma \nsim \varphi$ (resp. $\varphi \nsim \Delta'$), alors Δ' (resp. Γ) peut être lié à φ dans le séquent prémisse et libre dans le séquent conclusion.

Après l'application de toute autre règle d'inférence, si une occurrence est liée à son contexte dans le séquent prémisse de la règle, elle ne peut apparaître que comme occurrence ou sous-formule d'une occurrence liée à son contexte dans le séquent conclusion.

Remarque 10 (Gain de connexions). Une occurrence d'une formule qui est libre de connexions ne peut apparaître comme occurrence ou sous-formule d'une occurrence liée à son contexte après application d'une règle d'inférence que si cette règle est $\wedge_d$, $\vee_g$ ou aff.

6. Notion dont on peut trouver une définition précise dans le polycopié de M. Joinet distribué aux étudiants de Logique du parcours Lo.P.Hi.S.S. à Paris I.

Dans le cas de $\wedge_d$:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma' \vdash \Delta', \psi}{\Gamma, \Gamma', \vdash \Delta, \Delta', (\varphi \wedge \psi)} \wedge_d$$

Si $\Gamma' \sim \psi$, alors bien que $\Gamma \nsim \varphi$, $\Gamma' \sim (\varphi \wedge \psi)$. De même si $\Gamma \sim \varphi$, alors bien que ψ soit libre, $\Gamma \sim (\varphi \wedge \psi)$.

Dans le cas de $\vee_g$:

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta \qquad \psi, \Gamma' \vdash \Delta'}{(\varphi \vee \psi), \Gamma, \Gamma', \vdash \Delta, \Delta'} \vee_g$$

Si $\psi \sim \Delta'$, alors bien que $\varphi \nsim \Delta$, $(\varphi \vee \psi) \sim \Delta'$. De même si $\varphi \sim \Delta$, alors bien que $\psi \nsim \Delta'$, $(\varphi \vee \psi) \sim \Delta$.

Dans le cas des affaiblissements :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta} aff_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi} aff_d$$

L'occurrence affaiblie de φ peut être liée à des formules de Γ ou de Δ qui étaient auparavant libres.

Démonstration (remarque 9 et remarque 10)**.** Par simple examen des règles, on remarque que la plupart des connexions sont inchangées et qu'une occurrence de formule principale dans une règle logique hérite des connexions des occurrences de ses sous-formules actives dans cette règle lorsque c'est possible. □

Lemme 1 (Création de connexion)**.** *S'il existe une preuve π du séquent $\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \psi$ où $\varphi \nsim \psi$, alors il existe une preuve π^+ du même séquent avec les mêmes connexions et où $\varphi \sim \psi$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer à π un aff_g introduisant une occurrence de φ que l'on lie à ψ, puis de contracter les deux occurrences de φ à gauche du séquent. On a alors une preuve π^+ de $\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \psi$ où les liens entre Γ et Δ, ψ sont les mêmes que dans le séquent conclusion de π, mais où $\varphi \sim \psi$. On remarque que si π était sans coupures, il en est de même pour π^+. □

Lemme 2. *S'il existe une preuve π du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ où $\Gamma \nsim \Delta$, alors il existe une preuve du même séquent où $\Gamma \sim \Delta$.*

Démonstration. La démonstration est similaire à la démonstration du lemme 1 : il suffit d'affaiblir à gauche en liant sur les formules de Γ que l'on veut lier à Δ, puis de contracter ces occurrences. □

Proposition 1. *On peut, sans perdre de pouvoir expressif, supposer que les axiomes de **LDC** n'introduisent que des formules atomiques.*

Démonstration. On le démontre par récurrence sur la complexité des formules. Si la formule introduite est atomique, alors c'est évident. On définit dans la figure 2 une procédure de transformation si la formule est complexe. On peut facilement s'assurer que les contraintes sur les liens et les variables sont respectées et que dans la conclusion de la preuve transformée les deux occurrences de part et d'autre du signe $\vdash$ sont liées.

Convention 4. On dit d'une preuve qu'elle est **sans coupures** si et seulement si elle ne comporte aucune application de la règle *Cut*.

Si le connecteur principal est $\to$:

$$\dfrac{}{\psi \to \xi \vdash \psi \to \xi}\,Ax \qquad \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathrm{HR}\\ \psi \vdash \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \mathrm{HR}\\ \xi \vdash \xi\end{array}}{\psi \to \xi, \psi \vdash \xi}\,\to_g}{\psi \to \xi \vdash \psi \to \xi}\,\to_d$$

Si le connecteur principal est $\wedge$:

$$\dfrac{}{\psi \wedge \xi \vdash \psi \wedge \xi}\,Ax \qquad \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathrm{HR}\\ \psi \vdash \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \mathrm{HR}\\ \xi \vdash \xi\end{array}}{\psi, \xi \vdash \psi \wedge \xi}\,\wedge_d}{\psi \wedge \xi, \xi \vdash \psi \wedge \xi}\,\wedge_g^1}{\psi \wedge \xi, \psi \wedge \xi \vdash \psi \wedge \xi}\,\wedge_g^2}{\psi \wedge \xi \vdash \psi \wedge \xi}\,ctr_g$$

Si le connecteur principal est $\vee$:

$$\dfrac{}{\psi \vee \xi \vdash \psi \vee \xi}\,Ax \qquad \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathrm{HR}\\ \psi \vdash \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \mathrm{HR}\\ \xi \vdash \xi\end{array}}{\psi \vee \xi \vdash \psi, \xi}\,\vee_g}{\psi \vee \xi \vdash \psi \vee \xi, \xi}\,\vee_d^1}{\psi \vee \xi \vdash \psi \vee \xi, \psi \vee \xi}\,\vee_d^2}{\psi \vee \xi \vdash \psi \vee \xi}\,ctr_d$$

Si le connecteur principal est $\forall$:

$$\dfrac{}{\forall x\, \psi(x) \vdash \forall x\, \psi(x)}\,Ax \qquad \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathrm{HR}\\ \psi(x) \vdash \psi(x)\end{array}}{\forall x\, \psi(x) \vdash \psi(x)}\,\forall_g}{\forall x\, \psi(x) \vdash \forall x\, \psi(x)}\,\forall_d$$

Si le connecteur principal est $\exists$:

$$\dfrac{}{\exists x\, \psi(x) \vdash \exists x\, \psi(x)}\,Ax \qquad \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathrm{HR}\\ \psi(x) \vdash \psi(x)\end{array}}{\psi(x) \vdash \exists x\, \psi(x)}\,\exists_d}{\exists x\, \psi(x) \vdash \exists x\, \psi(x)}\,\exists_g$$

FIGURE 2: Procédure d'expansion des axiomes

Lemme 3. *Si π est une preuve en **LDC** sans coupures du séquent $\sigma := \varphi, \Gamma \vdash \Delta$ et si $\varphi \nsim \Delta$, alors on peut construire en **LDC** sans coupures une preuve $\pi*$ du séquent $\sigma* := \Gamma \vdash \Delta$ où les connexions entre Γ et Δ dans les séquents σ et $\sigma*$ sont les mêmes.*

Démonstration. On le démontre par récurrence sur la hauteur de π. Soit $r(\pi)$ la dernière règle de π :

Si $\mid \pi \mid= 0$, $r(\pi)$ est une application de ax ou de efq. Dans les deux cas il n'est pas possible que σ ait la forme de $\varphi, \Gamma \vdash \Delta$ avec $\varphi \nsim \Delta$.

Sinon, on suppose le lemme démontré pour les preuves de hauteur i (avec $i \leq n$) et on le démontre pour $n+1$ en raisonnant par cas sur $r(\pi)$:

1. Si φ est passive dans $r(\pi)$, la preuve du séquent prémisse de $r(\pi)$ où φ occurre peut, par hypothèse de récurrence, être transformée en une preuve avec les mêmes connexions mais sans cette occurrence de φ car cette occurrence y est libre de connexions. Il suffit alors d'appliquer à la preuve obtenue la même règle $r(\pi)$ (ainsi qu'à la preuve, inchangée, de l'autre séquent prémisse, si $r(\pi)$ est binaire) à cette preuve pour obtenir la preuve recherchée.

On traite le cas où $r(\pi) := \wedge_d$ et où φ occurre dans le séquent prémisse droite. On a alors $\sigma := \varphi, \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', (\xi \wedge \psi)$. π est de la sorte :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_g \\ \Gamma \vdash \Delta, \xi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_d \\ \varphi, \Gamma' \vdash \Delta', \psi\end{array}}{\varphi, \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', (\xi \wedge \psi)}\ \wedge_d$$

Puisque φ est passive et qu'elle n'est pas liée dans le séquent conclusion, elle n'est pas liée non plus dans le séquent prémisse droite. On peut donc produire par hypothèse de récurrence une preuve $\pi_{d}*$ de $\Gamma' \vdash \Delta', \psi$, qu'on associe à la preuve π_g par une application de $\wedge_d$ dont ξ et ψ sont les actives pour obtenir la preuve $\pi*$ de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', (\xi \wedge \psi)$ où les connexions sont les mêmes que dans σ.
Si φ appartient au séquent prémisse gauche alors la procédure est similaire.

2. Sinon, c'est que φ est principale dans $r(\pi)$ car elle se trouve dans le séquent conclusion de $r(\pi)$ et ne peut donc pas être active en vertu de la remarque 3.

   On examine les différents cas :

   a. Si $r(\pi) := aff_g$, le séquent prémisse de $r(\pi)$ est la preuve recherchée.

   b. Si $r(\pi) := ctr_g$, le séquent prémisse de $r(\pi)$ est $\varphi, \varphi, \Gamma \vdash \Delta$, dans lequel aucune des deux occurrences de φ n'est liée à Δ. Par hypothèse de récurrence, on peut obtenir une preuve sans coupures de $\varphi, \Gamma \vdash \Delta$ où $\varphi \nsim \Delta$. En appliquant de nouveau l'hypothèse de récurrence on obtient la preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ recherchée.

   c. Si $r(\pi) := \wedge_g$, $\forall_g$ ou $\exists_g$, l'hypothèse de récurrence appliquée au séquent prémisse nous donne la preuve recherchée.

   d. Si $r(\pi) := \vee_g$, alors $\varphi := (\xi \vee \psi)$. On applique l'hypothèse de réccurence à la preuve d'un des séquents prémisses, et par affaiblissements on obtient la preuve recherchée :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_g}{\xi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \dfrac{\pi_d\ \vdots}{\psi, \Gamma' \vdash \Delta'}}{(\xi \vee \psi), \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta',}\ \vee_g \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_{g^*}}{\Gamma \vdash \Delta}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}\ aff_g}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ aff_d$$

Dans la preuve transformée, il y a autant d'aff_g (resp. d'aff_d) que de formules dans Γ' (resp. dans Δ') ; et les affaiblissement lient les formules de Γ' et de Δ' de la même façon que dans le séquent σ. On est assuré que $\Gamma \nsim \Delta'$ en σ car $\psi \nsim \Delta'$ en σ_d.

e. Si $r(\pi) :=\rightarrow_g$, le cas est assez similaire. On a alors $\varphi := (\xi \rightarrow \psi)$ et $\sigma := (\xi \rightarrow \psi), \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$. Puisque $(\xi \rightarrow \psi) \nsim (\Delta, \Delta')$ en σ, on sait que dans le séquent prémisse droite, $\psi, \Gamma' \vdash \Delta'$, on a $\psi \nsim \Delta'$. On sait ainsi que dans le séquent σ il n'y a pas de connexions entre Γ et Δ'. Par hypothèse de récurrence on peut donc obtenir une preuve de $\Gamma' \vdash \Delta'$ avec les mêmes connexions, et des affaiblissements nous permettent d'obtenir le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ avec les mêmes connexions qu'en σ.

$r(\pi)$ ne peut pas être d'une autre forme puisque π est sans coupures. φ étant forcément principale ou passive, tous les cas ont été traités.

Ainsi, quelle que soit la hauteur de π, il est possible de transformer une preuve sans coupures π de $\varphi, \Gamma \vdash \Delta$ où $\varphi \nsim \Delta$ en une preuve sans coupures $\pi*$ de $\Gamma \vdash \Delta$.

□

Corollaire 1. *Si π est une preuve en **LDC** sans coupures du séquent $\sigma := \Gamma', \Gamma \vdash \Delta$ et si $\Gamma' \nsim \Delta$, alors on peut construire en **LDC** sans coupures une preuve $\pi*$ du séquent $\sigma* := \Gamma \vdash \Delta$ où les connexions entre Γ et Δ dans les séquents σ et σ' sont les mêmes.*

Démonstration. Il suffit d'itérer le lemme 3 aux formules de Γ'. □

Lemme 4. *S'il existe une preuve π en **LDC** sans coupures du séquent $\sigma := \Gamma \vdash \Delta, \bot$, alors pour toute φ il existe une preuve $\pi^\star$ de $\sigma' := \Gamma \vdash \Delta, \varphi$ en **LDC** sans coupures et les connexions en σ' entre Γ et Δ, φ sont les mêmes que les connexions en σ entre Γ et $\Delta, \bot$.*

Démonstration. On procède d'une façon semblable à la démonstration du lemme 3, par récurrence sur la hauteur de π, $r(\pi)$ étant sa dernière règle.

Si $|\ \pi\ |= 0$, $r(\pi)$ est ax, donc $\sigma := \bot \vdash \bot$, $\bot \sim \bot$ et on obtient $\sigma' := \bot \vdash \varphi$ par efq, auquel cas on a bien $\bot \sim \varphi$. $r(\pi)$ ne peut être un efq en raison de la remarque 7 page 7.

Sinon, on suppose le lemme démontré pour les preuves de hauteur i, avec $i \leq n$ et on le démontre pour toute preuve de hauteur $n+1$ en raisonnant par cas sur $r(\pi)$:

1. Si $\bot$ est principale dans $r(\pi)$, alors il n'y a que deux cas à inspecter :
   – si $r(\pi) := ctr_d$, l'hypothèse de récurrence appliquée deux fois au séquent prémisse nous donne une preuve où il suffit d'appliquer une ctr_d aux occurrences de φ pour obtenir la preuve $\pi^\star$ recherchée.

— si $r(\pi) := aff_d$, $\perp$ est la formule introduite, et il suffit d'appliquer à la preuve prémisse de r un aff_d introduisant φ et la liant de la même façon à son contexte.

$\perp$ est atomique et ne peut donc être principale dans aucune autre règle d'inférence.

2. Si $\perp$ est passive dans $r(\pi)$, l'hypothèse de récurrence appliquée à la preuve du séquent prémisse de $r(\pi)$ dans laquelle figure $\perp$ nous donne une preuve à laquelle il suffit d'appliquer la même règle aux mêmes formules pour obtenir la preuve recherchée.
3. $\perp$ ne peut pas être active dans $r(\pi)$ en vertu de la remarque 3.

Nous avons inspecté tous les cas possibles. □

On introduit désormais la notion d'ancêtre d'une occurrence, qui nous permet de « pister » le cheminement des occurences d'une formule dans une preuve. Cet outil nous sera utile pour mesurer la compléxité d'une coupure.

Définition 6 (Ancêtre d'une occurrence)**.** Si φ est une occurrence de formule dans le séquent conclusion d'une règle dont elle n'est pas la principale, alors elle « provient » d'une occurrence de φ dans le séquent prémisse de la règle si elle est unaire, et dans l'un des deux séquents prémisses si elle est binaire. On écrit que l'occurence de φ dans le séquent prémisse est l'ancêtre de l'occurrence de φ dans le séquent conclusion. De plus, si l'occurrence de φ est la principale d'une règle de contraction, alors elle a deux ancêtres dans le séquent prémisse de la règle.

Définition 7 (Arbre des ancêtres)**.** Pour chaque preuve π, on définit la notion d'arbre des ancêtres d'une occurrence d'une formule φ dans un séquent de π. À partir d'une occurrence de φ donnée, on « remonte » la preuve π en intégrant obstinément tous les ancêtres de cette occurrence. L'arbre se dédouble en deux branches à chaque fois qu'une des occurrences inclue dans l'arbre est principale d'une règle de contraction. La hauteur d'une branche est le nombre d'occurences de la formule considérée qu'elle contient. La longueur d'un arbre est égale au *max.* de la hauteur de ses branches.

Proposition 2. *Une branche d'une arbre des ancêtres partant d'une occurrence d'une formule ne s'arrête que lorsque la dernière occurrence de cette formule considérée :*

- *est introduite par un axiome,*
- *est introduite par une règle d'affaiblissement,*
- *est introduite par un efq,*
- *est conclusion d'une règle qui introduit son connecteur principal.*

Démonstration. Par simple inspection des règles. □

Définition 8 (*M-cut*)**.** On introduit une nouvelle règle d'inférence, *Multi-cut*, que l'on abrège en *M-cut* :

$$\textit{M-cut}\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \overbrace{\varphi, \ldots, \varphi}^{m \text{ occurrences}} \qquad \overbrace{\varphi, \ldots, \varphi}^{n \text{ occurrences}}, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

$\Gamma \sim \Delta'$ ssi Γ est lié à au moins une des m occurrences de φ et si au moins une des n occurrences de φ est liée à Δ'. Les autres connexions sont inchangées.

Il est important de noter que des occurrences de φ peuvent figurer dans Δ ou Γ' et donc qu'elles ne sont pas éliminées lors de l'application de *M-cut*. Autrement dit, il peut y avoir des occurrences de φ qui ne sont pas actives. La formule dont des occurrences sont supprimées par l'application de *M-cut* est appelée la formule de coupure. On appelle parfois cette règle *M-cut*(m, n), m (resp. n) étant le nombre d'occurrences qui sont actives lors de l'application de cette règle dans le séquent prémisse gauche (resp. droite).

Remarque 11. *Cut* est une forme spéciale de *M-cut*, à savoir le cas où m et n valent 1, c'est-à-dire que les séquents prémisses ne contiennent qu'une occurrence de la formule de coupure. Une simple inspection des règles nous permet de nous assurer que les connexions sont les mêmes. □

Proposition 3. *M-cut est dérivable en **LDC**.*

Démonstration. On dérive :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \overbrace{\varphi, \ldots, \varphi}^{m \text{ occurrences}}}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\ ctr_d\text{, itérée } m-1 \text{ fois} \qquad \dfrac{\Gamma, \overbrace{\varphi, \ldots, \varphi}^{n \text{ occurrences}} \vdash \Delta'}{\Gamma', \varphi \vdash \Delta'}\ ctr_g\text{, itérée } n-1 \text{ fois}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{Cut}$$

Si $n = 0$ (resp. si $m = 0$), il suffit de procéder à un aff_d dans le séquent de gauche (resp. à un aff_g dans le séquent de droite) introduisant φ sans la lier au contexte. On peut dès lors procéder comme indiqué ci-dessus.

Il est facile de vérifier que la succession des règles (aff), *ctr* puis *Cut* influe sur les connexions de la même façon que *M-cut*. □

Définition 9 (Degré et rang d'une *M-cut*)**.** On considère une instance M de la règle *M-cut*.

- Son **degré** est le nombre de connecteurs logiques et de quantificateurs occurant dans la formule de coupure, on le note $d(M)$.
- Son **rang de droite**, que l'on note $rg(M_d)$ est défini comme le *max*. de la longueur des arbres des ancêtres partant des occurrences de la formule de coupure dans son séquent prémisse de droite. Si dans ce séquent aucune occurrence de la formule de coupure n'est active, alors le rang de droite est égal à 0.
- Son **rang de gauche** est défini de façon symétrique, on le note $rg(M_g)$.
- Son **rang** est l'addition du rang de droite et du rang de gauche : $rg(M) = rg(M_d) + rg(M_g)$.

Convention 5 (Remplace la convention 4 page 8). On dit d'une preuve qu'elle est **sans coupures** si et seulement si elle ne comporte aucune application de *M-cut* (donc, *a fortiori*, de *Cut*).

Lemme 5. *Soit π une preuve de $\sigma : \Gamma \vdash \Delta$ en **LDC** qui ne contient aucune instance de Cut et seulement une instance de M-cut en dernière règle. À partir de π, on peut* *construire une preuve π' sans coupures de $\Gamma \vdash \Delta$ dans leque les connexions sont les mêmes.*

Convention 6. On pose une série de conventions afin de faciliter la démonstration : puisqu'on sait que la preuve π du séquent σ se termine par une *M-cut*, on sait que π est de la forme :

$$\pi \left\{ \quad \pi_g \left\{ \frac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \dots, \varphi}\,\mathrm{r}(\pi_g) \qquad \dfrac{\vdots}{\varphi, \dots, \varphi, \Gamma' \vdash \Delta'}\,\mathrm{r}(\pi_d)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,\textit{M-cut}(m,n) \right\} \pi_d \right.$$

On pose pour $c \in \{d, g\}$ et M l'unique instance de *M-cut* dans π :

- π_c est la preuve du séquent prémisse de M du côté c. C'est une preuve sans coupures du séquent σ_c, sa dernière règle est $r(\pi_c)$.
- Si $r(\pi_c)$ est unaire, son séquent prémisse (σ_c^-) est conclusion de π_c^-. Si elle est binaire, son séquent prémisse gauche (σ_{cg}) est conclusion de π_{cg}, son séquent prémisse droite (σ_{cd}) est conclusion de π_{cd}.
- On note $\overline{c}$ le côté opposé de c. C'est-à-dire que $\overline{g} = d$ et $\overline{d} = g$.

Par ailleurs, on emploie les lemme 3, lemme 4 et remarque 8 dans cette démonstration, et on emploie une notation standard :

- Si π est une preuve sans coupures de $\varphi, \Gamma \vdash \Delta$ où $\varphi \nsim \Delta$, $\pi*$ est une preuve sans coupures de $\Gamma \vdash \Delta$ (lemme 3).
- Si π est une preuve sans coupures de $\Gamma \vdash \Delta, \bot$, $\pi^\star$ est une preuve sans coupures de $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$, φ étant liée de la même façon que $\bot$ à Γ (lemme 4).
- Si π est une preuve du séquent σ, $\pi[x/t]$ est une preuve du séquent $\sigma[x/t]$, c'est-à-dire une preuve où toutes les occurrences libres de x ont été remplacées par des occurrences de t (remarque 8).

Démonstration. On démontre ce lemme 5 par double induction sur la complexité de la formule de coupure et sur le rang de cette *M-cut*. C'est-à-dire que l'on doit pouvoir produire pour toutes les valeurs de $rg(M)$ une preuve π' de σ où les éventuelles instances de *M-cut* ont un degré inférieur à $d(M)$, ou le même degré mais un rang inférieur. Il y a trois cas principaux à envisager : si $rg(M_d)$ ou $rg(M_g) = 0$, si $rg(M_d) = rg(M_g) = 1$, et si $rg(M_d) > 1$ et $rg(M_g) > 1$. Si pour ces trois cas on parvient à produire une preuve de σ avec des coupures de degré inférieur à $d(M)$, ou de même degré mais de rang inférieur à $rg(M)$, le résultat sera démontré.

I. **Si** $rg(M_d)$ **ou** $rg(M_g) = 0$

   Si le rang de droite ou le rang de gauche vaut 0, c'est que m ou n vaut 0, donc que le séquent prémisse droite ou le gauche ne compte aucune occurrence de la formule de coupure. On est alors assuré que dans σ il n'y a pas de lien entre Γ et Δ'. Si c'est m qui vaut 0, on obtient π' en introduisant Γ' et Δ' par affaiblissements à partir de π_g. On procède de façon symétrique si n vaut 0. Les connexions dans le séquent obtenu sont les mêmes que dans σ, car on aura veillé à les introduire de la même façon lors des affaiblissements. Cette preuve est alors sans coupures.

II. **Si** $rg(M_d) = 1$ **et** $rg(M_g) = 1$

   On est alors assuré que $m = n = 1$, donc la dernière règle de π est *M-cut*$(1, 1)$. Il n'y a donc qu'une occurrence de φ dans σ_c, et elle est principale en $r(\pi_c)$. En vertu de la proposition 2, une branche de l'arbre des ancêtres ne peut se terminer que de quatre façons : par un ax, un efq, un aff, ou si la dernière règle introduit le connecteur principal de φ.

II. a) **Si $r(\pi_d)$ ou $r(\pi_g)$ est un ax**

Si $r(\pi_d)$ est un ax, alors π_g est la preuve recherchée, et réciproquement :

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,ax \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_d\\ \varphi, \Gamma' \vdash \Delta'\end{array}}{\varphi, \Gamma', \vdash \Delta'}\,M\text{-}cut$$

Les connexions sont identiques en σ_d et en σ : φ est liée à Δ' en σ si et seulement si elle l'est en σ_d. π' est donc π_d, et elle ne comporte aucune *M-cut*.

II. b) **Si $r(\pi_d)$ ou $r(\pi_g)$ est un aff**

Il suffit alors de prendre la prémisse de la preuve du côté où a eu lieu l'affaiblissement et de procéder à des affaiblissements introduisant les contextes de l'autre côté, en les liant éventuellement. On illustre le cas où $r(\pi_g) = aff_d$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_g^-\\ \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\,aff_d \qquad \begin{array}{c}\pi_d\ \vdots\\ \varphi, \Gamma' \vdash \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,M\text{-}cut \qquad \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_g^-\\ \Gamma \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}\,aff_g}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,aff_d$$

S'il y a dans σ des formules de Γ qui sont liées à Δ', lors des aff_d introduisant les formules de Δ', on lie celles-ci à Γ de la même façon qu'en σ. π' ne compte aucune instance de *M-cut*.

On peut noter qu'il est aussi possible de transformer cette preuve de la façon suivante :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_g^-\\ \Gamma \vdash \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_d\ \vdots\\ \varphi, \Gamma' \vdash \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,M\text{-}cut(0,1)$$

On se retrouve alors avec une preuve où $rg(M_g)$ vaut 0 qui peut se traiter comme telle. Cette alternative a l'avantage de ne pas nécessiter la version « faible » de l'affaiblissement.

II. c) **Si $r(\pi_d)$ ou $r(\pi_g)$ est un efq**

Ces deux cas se traitent différemment :

— Si $r(\pi_d) = efq$, π est de la forme :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_g\\ \Gamma \vdash \Delta, \bot\end{array} \qquad \dfrac{}{\bot \vdash \varphi}\,efq}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\,M\text{-}cut$$

Par le lemme 4, il est possible à partir de π_g d'obtenir une preuve $\pi_g^\star$ de $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$, où φ est liée à Γ de la même façon que $\bot$ à Γ en σ_g. Or on sait que $\Gamma \sim \varphi$ en σ si et seulement si $\Gamma \sim \bot$ en σ_g. Les connexions du séquent conclusion de $\pi_g^\star = \pi'$ sont donc les mêmes qu'en σ, et cette preuve est sans coupures.

– Si $r(\pi_g) = efq$, π est de la forme :

$$\dfrac{\dfrac{}{\bot \vdash \varphi}\,efq \qquad \begin{array}{c}\pi_d\ \vdots \\ \varphi, \Gamma' \vdash \Delta'\end{array}}{\bot, \Gamma' \vdash \Delta'}\,M\text{-}cut$$

Il y a deux cas à considérer :

Si $\varphi \sim \Delta'$ **en** σ_d π' est un efq introduisant l'une des formules de Δ' à laquelle φ est liée en σ_d suivie d'affaiblissements introduisant Γ' et les formules restantes de Δ'. Les connexions seront les mêmes puisqu'il suffit de les recréer lors des affaiblissements.

Si $\varphi \nsim \Delta'$ **en** σ_d on peut, par le lemme 3, obtenir une preuve π^*_d de $\Gamma' \vdash \Delta'$ à laquelle il suffit d'appliquer un aff_g introduisant $\bot$ et le liant de la même façon qu'en σ pour obtenir π'.

Ainsi si $r(\pi_d)$ ou $r(\pi_g)$ est un efq, il est possible de produire une preuve π' sans aucune instance de *M-cut*.

Si $rg(M_d) = rg(M_g) = 1$ et que $r(\pi_g)$ et $r(\pi_d)$ n'introduisent pas le connecteur principal de la formule de coupure, il est possible d'obtenir une preuve π' de σ avec les mêmes connexions et qui ne comporte aucune instance de *M-cut*.

II. d) **Si** $r(\pi_d)$ **et** $r(\pi_g)$ **introduisent le connecteur principal de** φ

Il s'agit du dernier cas à examiner, et on va voir qu'il n'est pas possible d'obtenir une preuve de σ sans *M-cut*, mais que le degré de l'instance de *M-cut* (ou des instances pour le cas de $\rightarrow$) en π' est inférieur à $d(M)$. Puisque $m = n = 1$, le connecteur principal de φ est introduit à la fois par $r(\pi_g)$ et par $r(\pi_d)$.

– **Si** $r(\pi_d)$ **et** $r(\pi_g)$ **introduisent des conjonctions ou des disjonctions**

Ce cas de figure englobe quatre cas :

– $r(\pi_d) = \wedge^1_g$ et $r(\pi_g) = \wedge_d$ – $r(\pi_d) = \vee_g$ et $r(\pi_g) = \vee^1_d$
– $r(\pi_d) = \wedge^2_g$ et $r(\pi_g) = \wedge_d$ – $r(\pi_d) = \vee_g$ et $r(\pi_g) = \vee^2_d$

Ces cas sont similaires : il y a toujours une règle binaire et une règle unaire, et la procédure est identique. Du côté de la règle binaire, on « coupe » l'un des deux prémisses sur la preuve de l'autre côté, et on affaiblit sur le contexte manquant. On illustre la procédure avec le premier cas :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_{gg} \\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_{gd} \\ \Gamma_2 \vdash \Delta_2, \xi\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \psi \wedge \xi}\,\wedge_d \qquad \wedge^1_g\,\dfrac{\begin{array}{c}\pi^-_d\ \vdots \\ \psi, \Gamma_3 \vdash \Delta_3\end{array}}{\psi \wedge \xi, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}\,M\text{-}cut$$

On obtient π' de la façon qui suit :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\;\pi_{gg}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \psi} \qquad \overset{\pi_d^-\;\vdots}{\psi, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3}\,M\text{-}cut}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3}\,aff_g}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}\,aff_d$$

Le degré de l'instance de *M-cut* en π' est inférieur à $d(M)$, et on vérifie que les connexions sont les mêmes :

Connexions	En π	En π'
$\Gamma_x \sim \Delta_x, \forall x \in \{1,2,3\}$	Inchangées	Inchangées, si $x = 2$ les liaisons sont recréés à l'identique lors des affaiblissements
$\Gamma_1 \sim \Delta_2$, $\Gamma_2 \sim \Delta_1$ et $\Gamma_3 \sim \Delta_2$	Impossibles	Il suffit de ne pas créer ces liaisons lorsqu'on introduit Γ_2 et Δ_2
$\Gamma_1 \sim \Delta_3$	ssi $\Gamma_1 \sim \psi$ en σ_{gg} et $\psi \sim \Delta_3$ en σ_d^-	
$\Gamma_2 \sim \Gamma_3$	ssi $\Gamma_2 \sim \psi$ en σ_{gd} et $\psi \sim \Delta_3$ en σ_d^-	Peuvent être recrées lors de l'affaiblissement sur Γ_2
$\Gamma_3 \sim \Delta_1$	Impossible	

– **Si** $r(\pi_d) = \rightarrow_g$ **et** $r(\pi_g) = \rightarrow_d$
π est de la sorte :

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\pi_g^-\;\vdots}{\psi, \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \xi}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, (\psi \rightarrow \xi)}\rightarrow_d \qquad \dfrac{\overset{\vdots\;\pi_{dg}}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2, \psi} \qquad \overset{\pi_{dd}\;\vdots}{\xi, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{(\psi \rightarrow \xi), \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_2, \Delta_3}\rightarrow_g}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}\,M\text{-}cut$$

On obtient π' de cette façon :

$$M\text{-}cut\,\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\;\pi_{dg}}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2, \psi} \qquad \overset{\vdots\;\pi_g^-}{\psi, \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \xi}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Gamma_2, \xi}\,M\text{-}cut \qquad \overset{\vdots\;\pi_{dd}}{\xi, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}$$

On vérifie que les connexions sont les mêmes, et pour cela il importe de remarquer que dans la preuve π il est impossible :
- que ψ soit lié à Δ_1 en σ_g^-, car ce séquent est prémisse d'une $\rightarrow_d$
- et que Γ_2 soit lié à $\psi \rightarrow \xi$ en σ_d^-, car ils se trouvent du même côté du séquent.

Connexions	En π	En π'
$\Gamma_x \sim \Delta_x, \forall x \in \{1,2,3\}$	Inchangées	
$\Gamma_1 \sim \Delta_2$, $\Gamma_2 \sim \Delta_1$, $\Gamma_3 \sim \Delta_1$ et $\Gamma_3 \sim \Delta_2$	Impossibles	
$\Gamma_1 \sim \Delta_3$	ssi $\Gamma_1 \sim \xi$ en σ_g^- et $\xi \sim \Delta_3$ en σ_{dd}	
$\Gamma_2 \sim \Gamma_3$	ssi $\Gamma_2 \sim \psi$ en σ_{dg} et $\xi \sim \Delta_3$ en σ_{dd}	Mêmes conditions plus $\psi \sim \xi$ en σ_g^-

Pour ce dernier cas, en vertu du lemme 1, il existe une preuve

$(\pi_g^-)^+$ sans *M-cut* ni coupure de $\psi, \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \xi$ où $\psi \sim \xi$, que l'on peut substituer à π_g^- si besoin est. Le séquent conclusion de π' est donc identique à σ, connexions comprises.
π' compte deux applications de *M-cut*, mais elles sont toutes les deux de degré inférieur à $d(M)$. Les formules de coupure sont en effet ψ et ξ, alors qu'en π la formule de coupure était $(\psi \to \xi)$. Il est donc possible, par hypothèse de récurrence, de supprimer ces deux applications de *M-cut* et d'obtenir une preuve de σ sans *M-cut*.[7]

— **Si** $r(\pi_d)$ **et** $r(\pi_g)$ **introduisent des quantificateurs**
C'est-à-dire si $r(\pi_c) = \forall_{\bar{c}}$ ou si $r(\pi_c) = \exists_{\bar{c}}$. Ces deux cas utilisent la remarque 8 et se traitent de façon symétrique.
On traite le cas où $r(\pi_g) = \forall_d$ et $r(\pi_d) = \forall_g$. π est de la forme :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_g^-}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(x)}}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\ \varphi(x)}\ \forall_d \qquad \forall_g\ \dfrac{\dfrac{\pi_d^-\ \vdots}{\varphi(t), \Gamma' \vdash \Delta'}}{\forall x\ \varphi(x), \Gamma' \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ M\text{-}cut(1,1)$$

Par la remarque 8, et puisque $x \notin Var_{lib}(\Gamma \cup \Delta)$ il existe une preuve $\pi_g^-[x/t]$ de $\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t)$ que l'on peut prendre pour prémisse gauche d'une *M-cut* portant sur $\varphi(t)$ et ayant pour prémisse droite σ_d^-. On vérifie facilement que les liaisons sont bien les mêmes que dans la conclusion de π. La formule de coupure, $\varphi(t)$, est de complexité inférieure à $\forall x\ \varphi(x)$. Il existe donc, par hypothèse de récurrence, une preuve de σ sans coupures.

Ainsi, il est possible de prouver σ sans coupures la plupart des fois, ou en faisant baisser le degré des *M-cut* lorsque $r(\pi_d)$ ou $r(\pi_g)$ introduisent le connecteur principal de la formule de coupure.

III. **Si** $rg(M_d) > 1$ **et** $rg(M_g) > 1$
Ce cas englobe quatre possibilités :
— si une des occurrences de la formule de coupure est principale dans $r(\pi_g)$,
— si une des occurrences de la formule de coupure est principale dans $r(\pi_d)$,
— si toutes les occurrences de la formule de coupure sont passives dans $r(\pi_d)$ et
— si toutes les occurrences de la formule de coupure sont passives dans $r(\pi_g)$.

Il faut nous assurer que dans ces quatre cas il est possible de prouver σ avec des *M-cut* de même degré que M mais de rang inférieur. Ainsi, par hypothèse de récurrence, il est possible d'amener ces rangs jusqu'à 1 et d'appliquer ensuite les résultats démontrés en II. pour effacer tout instance de *M-cut* ou faire baisser le degré des *M-cut* occurrantes.

Le plus souvent nous allons être amenés à multiplier le nombre d'instances de *M-cut*. On s'autorisera alors à étiqueter les instances avec des

7. On a choisi ici de couper π_g^- sur π_{dg}, puis la résultante sur π_{dd}, mais il est également possible de couper π_g^- sur π_{dd}, puis la résultante sur π_{dg}. Les contraintes sur les connexions se traitent de la même façon.

entiers afin de les distinguer plus commodément. Puisque $rg(M_c) > 1$, on sait qu'il y a au moins une occurrence de la formule de coupure dans σ_c, mais il n'y a pas de maximum. Le multi-ensemble composé exclusivement d'occurrences de la formule de coupure qui sont éliminées par l'application de M en π est noté Θ, et indicé en fonction des cas. On sait enfin que $r(\pi_c)$ ne peut appartenir au groupe axiome car $rg(M_c) > 1$.

III. a) **Si une des occurrences de la formule de coupure est principale dans** $r(\pi_g)$

On traite d'abord le groupe structurel, puis le groupe logique, en distinguant la règle binaire et les règles unaires.

III. a) 1- **Si** $r(\pi_g) = aff_d$

π est alors de la forme :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_g^-}{\Gamma \vdash \Delta, \Theta_1}}{\Gamma \vdash \Delta, \Theta_1, \varphi}\ aff_d \qquad \dfrac{\pi_d\ \vdots}{\Theta_2, \Gamma' \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

On obtient π' en coupant π_g^- sur π_d. Cette preuve ne compte qu'une instance de *M-cut* de même degré que M mais le rang de gauche a baissé de 1. Si l'affaiblissement liait φ à Γ, on a perdu une connexion entre Γ et Δ'. Il suffit alors de recréer cette liaison en suivant le protocole décrit dans la démonstration du lemme 1, ce qui est possible car $\Gamma \neq \emptyset$.

III. a) 2- **Si** $r(\pi_g) = ctr_d$

Il suffit alors de couper π_g^- sur π_d. π' n'a alors qu'une instance de *M-cut*, en dernière règle, et son rang de gauche est inférieur à $rg(M_g)$ de 1. Par hypothèse de récurrence il existe donc une preuve de σ sans coupures.

III. a) 3- **Si** $r(\pi_g)$ **est binaire**

C'est-à-dire si $r(\pi_g) = \wedge_d$.

La formule de coupure est alors $\psi \wedge \xi$. π est de la sorte :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_{gg}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1, \psi} \qquad \dfrac{\vdots\ \pi_{gd}}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2, \Theta_2, \xi}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Theta_1, \Theta_2, (\psi \wedge \xi)}\ \wedge_d \qquad \dfrac{\pi_d\ \vdots}{\Theta_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}\ M\text{-}cut$$

On obtient π' en dupliquant les coupures :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_{gg}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1, \psi} \qquad \dfrac{\pi_d\ \vdots}{\Theta_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3, \psi}\ M\text{-}cut_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_{gg}}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2, \Theta_2, \xi} \qquad \dfrac{\pi_d\ \vdots}{\Theta_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_2, \Delta_3, \xi}\ M\text{-}cut_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, (\psi \wedge \xi)}\ \wedge_d \qquad \dfrac{\pi_d\ \vdots}{\Theta_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_3}\ M\text{-}cut_3}{\dfrac{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_3}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}\ ctr_d}\ ctr_g$$

On commence par vérifier les liaisons :

Connexions	En π	En π'
$\Gamma_x \sim \Delta_x, \forall x \in \{1,2,3\}$	Inchangées	
$\Gamma_1 \sim \Delta_2$, $\Gamma_2 \sim \Delta_1$ et $\Gamma_3 \sim \Delta_1$	Impossible	
$\Gamma_1 \sim \Delta_3$	ssi Γ_1 est lié à Θ_1 ou à ψ en σ_{gg} et $\Theta_3 \sim \Delta_3$ en σ_d	
$\Gamma_2 \sim \Delta_3$	ssi Γ_2 est lié à Θ_2 ou à ξ en σ_{gd} et $\Theta_3 \sim \Delta_3$ en σ_d	

Ensuite on vérifie que le rang de ces trois *M-cut* est inférieur à $rg(M)$:

— *M-cut*$_1$ et *M-cut*$_2$ sont de degré $d(M)$, leurs rangs de droite sont égaux à $rg(M_d)$, mais leurs rangs de gauche sont inférieurs à $rg(M_g)$;

— *M-cut*$_3$ est de degré $d(M)$, son rang de droite est égal à $rg(M_d)$, mais son rang de gauche vaut 1.

Puisque le rang de ces trois instances de *M-cut* est plus faible que $rg(M)$, il est possible par hypothèse de récurrence d'obtenir une preuve de σ sans coupures.

III. a) 4- **Si $r(\pi_g)$ est unaire**

C'est-à-dire si $r(\pi_g) = \vee_d^1, \vee_d^2, \to_d, \exists_d$ ou $\forall_d$. Ces cinq cas se traitent de la même façon. Il suffit de couper π_g^- sur π_d, d'appliquer la règle en question aux mêmes occurrences et de couper de nouveau la résultante sur π_d. On a alors deux instances de *M-cut*, mais ses rangs sont inférieurs à $rg(M)$.

On illustre ce cas avec $\to_d$:

$$\pi\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_g^-\\ \psi,\Gamma_1\vdash\Delta_1,\Theta_1,\xi\end{array}}{\Gamma_1\vdash\Delta_1,\Theta_1,(\psi\to\xi)}\to_d \qquad \begin{array}{c}\pi_d\ \vdots\\ \Theta_2,\Gamma_2\vdash\Delta_2\end{array}}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,M\text{-}cut\end{array}\right.$$

π' est alors :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_g^-\\ \psi,\Gamma_1\vdash\Delta_1,\Theta_1,\xi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_d\ \vdots\\ \Theta_2,\Gamma_2\vdash\Delta_2\end{array}}{\psi,\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2,\xi}\,M\text{-}cut_1}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2,(\psi\to\xi)}\to_d \qquad \begin{array}{c}\pi_d\ \vdots\\ \Theta_2,\Gamma_2\vdash\Delta_2\end{array}}{\dfrac{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2,\Delta_2}{\dfrac{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2,\Delta_2}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,ctr_d}\,ctr_g}\,M\text{-}cut_2$$

On vérifie sans peine que les contraintes sur les connexions sont identiques en π et en π', notamment parce que $\psi \nsim \Delta_1 \cup \Theta_1$ en σ_g^-. Les degrés et les rangs de droite de *M-cut*$_1$ et *M-cut*$_2$ sont égaux à $d(M)$ et $rg(M_d)$, mais leurs rangs de gauche sont inférieurs à $rg(M_g)$. Il existe donc, par hypothèse de récurrence, une preuve de σ sans coupures.

III. b) **Si toutes les occurrences de la formule de coupure sont passives dans** $r(\pi_g)$

Il suffit alors de couper le(s) séquent(s) prémisse de π_g avec π_d puis d'appliquer la même règle aux mêmes occurrences. En réalité, on ne fait que permuter l'ordre d'application des règles. Le degré de la ou des *M-cut* est égal à $d(M)$, mais le rang de gauche décroît.

III. b) 1- **Si** $r(\pi_g)$ **est une règle unaire**

Ce cas englobe les affaiblissements, les contractions, l'introduction de quantificateurs, $\wedge_g$, $\vee_d$ et $\rightarrow_d$.

On l'illustre avec $\forall_d$ et $\rightarrow_d$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_g^-\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1, \varphi(x)\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall_d \qquad \begin{array}{c}\pi_d\ \vdots\\ \Theta_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Gamma_2, \forall x\, \varphi(x)}\, M\text{-}cut$$

Si $x \in Var_{lib}(\Gamma_2 \cup \Delta_2)$, on procède à un renommage des variables dans σ_d, et on obtient π' ainsi :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_g^-\\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1, \varphi(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_d\ \vdots\\ \Theta_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Gamma_2, \varphi(x)}\, M\text{-}cut}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall_d$$

En ce qui concerne $\rightarrow_d$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_g^-\\ \psi, \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1, \xi\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1, (\psi \rightarrow \xi)}\,\rightarrow_d \qquad \begin{array}{c}\pi_d\ \vdots\\ \Theta_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Gamma_2, (\psi \rightarrow \xi)}\, M\text{-}cut$$

On sait qu'en σ_g^- ψ n'est liée ni à Θ_1 ni à Δ_1, on peut donc construire π' de la sorte :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_g^-\\ \psi, \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1, \xi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_d\ \vdots\\ \Theta_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_2\end{array}}{\psi, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Gamma_2, \xi}\, M\text{-}cut}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, (\psi \rightarrow \xi)}\,\rightarrow_d$$

Le rang de ces *M-cut* est inférieur à $rg(M)$ de 1 et il est facile de vérifier que les contraintes sur les connexions sont identiques.

III. b) 2- **Si** $r(\pi_g)$ **est une règle binaire**

Ce cas englobe les règles $\vee_g$, $\wedge_d$ et $\rightarrow_g$.

On ne traite que de $\rightarrow_g$. π est alors de la forme :

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_{gg}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1, \psi} \qquad \overset{\vdots\ \pi_{gd}}{\xi, \Gamma_2 \vdash \Delta_2, \Theta_2}}{(\psi \to \xi), \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Theta_1, \Theta_2}\to_g \qquad \overset{\pi_d\ \vdots}{\Theta_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{(\psi \to \xi), \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}\textit{M-cut}$$

π' est alors :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_{gg}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1, \psi} \qquad \overset{\pi_d\ \vdots}{\Theta_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3, \psi}\textit{M-cut}_1 \qquad \dfrac{\overset{\vdots\ \pi_{gd}}{\xi, \Gamma_2 \vdash \Delta_2, \Theta_2} \qquad \overset{\pi_d\ \vdots}{\Theta_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\xi, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_2, \Delta_3}\textit{M-cut}_2}{(\psi \to \xi), \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_3}\to_g}{(\psi \to \xi), \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_3}ctr_g}{(\psi \to \xi), \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}ctr_d$$

M-cut$_1$ et *M-cut*$_2$ ont un degré égal à $d(M)$, mais leurs rangs de gauche sont inférieurs à $rg(M_g)$, il existe donc par hypothèse de récurrence une preuve de σ sans coupures.

III. c) **Si une des occurrences de la formule de coupure est principale dans $r(\pi_d)$**

On traite d'abord le groupe structurel, puis le groupe logique, en distinguant les règles binaires et les règles unaires.

III. c) 1- **Si $r(\pi_d) = aff_g$ ou ctr_g**

Il suffit alors de couper π_d^- sur π_g. Le degré de cette *M-cut* est égal à $d(M)$, mais le rang de droite décroît.

III. c) 2- **Si $r(\pi_d)$ est une règle binaire**

Il faut alors couper π_{dg} et π_{dd} sur π_g, appliquer la même instance de règle aux mêmes formules, couper de nouveau la résultante sur π_g, et contracter le contexte de σ_g. Les *M-cut* introduites ont un rang inférieur à $rg(M)$.

On illustre ce cas avec $\to_g$, la procédure pour $\vee_g$ est similaire :

$$\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_g}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1} \qquad \dfrac{\overset{\pi_{dg}\ \vdots}{\Theta_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_2, \psi} \qquad \overset{\pi_{dd}\ \vdots}{\xi, \Theta_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{(\psi \to \xi), \Theta_2, \Theta_3, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_2, \Delta_3}\to_g}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}\textit{M-cut}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_g}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_g}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1} \qquad \overset{\pi_{dg}\ \vdots}{\Theta_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_2, \psi}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2\psi}\textit{M-cut}_1 \qquad \dfrac{\overset{\vdots\ \pi_g}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1} \qquad \overset{\pi_{dd}\ \vdots}{\xi, \Theta_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\xi, \Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_3}\textit{M-cut}_2}{(\psi \to \xi), \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}\to_g}{\Gamma_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}\textit{M-cut}_3}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}ctr_g}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}ctr_d$$

Vérifier que les connexions sont inchangées pose peu de problèmes et les trois *M-cut* introduites ici ont toutes un rang de droite inférieur à $rg(M_d)$.

III. c) 3- **Si $r(\pi_d)$ est une règle unaire**

Pour obtenir π' il faut alors couper π_d^- sur π_g, appliquer la règle en question à la même occurrence, couper de nouveau la résultante sur π_g, et contracter le contexte de σ_g. Les *M-cut* introduites ont un rang de droite inférieur à $rg(M_d)$.

Ce cas englobe $\wedge_g$, $\exists_g$ et $\forall_g$, on l'illustre avec cette dernière règle :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_g}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1} \quad \dfrac{\dfrac{\pi_d^- \,\vdots}{\varphi[t/x], \Theta_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}}{\forall x\, \varphi(x), \Theta_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}\forall_g}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} M\text{-}cut$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_g}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_g}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1} \quad \dfrac{\pi_d^- \,\vdots}{\varphi[t/x], \Theta_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}}{\varphi[t/x], \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} M\text{-}cut_1}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\forall_g}{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_1, \Delta_2} ctr_g}{\Gamma_1, \Gamma_2, \vdash \Delta_1, \Delta_2} ctr_d} M\text{-}cut_2$$

On vérifie facilement que les contraintes sur les liaisons sont identiques en π et en π' et le rang de droite de ces deux *M-cut* est inférieur à $rg(M_d)$.

III. d) **Si toutes les occurrences de la formule de coupure sont passives dans $r(\pi_d)$**

Il suffit alors de couper le(s) séquent(s) prémisse(s) de π_d avec π_g, d'appliquer la même règle aux mêmes occurrences, et éventuellement de contracter le contexte de σ_g. Le degré de la ou des *M-cut* est égal à $d(M)$, mais le rang de droite décroît. La procédure est symétrique à celle décrite en III. b), aussi nous ne traitons que du cas où $r(\pi_d) = \rightarrow_g$:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_g}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_{dg}}{\Theta_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_2, \psi} \quad \dfrac{\pi_{dd}\,\vdots}{\xi, \Theta_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{(\psi \to \xi), \Theta_2, \Theta_3, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_2, \Delta_3}\rightarrow_g}{(\psi \to \xi), \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} M\text{-}cut$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_g}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1} \quad \dfrac{\vdots\, \pi_{dg}}{\Theta_2, \Gamma_2 \vdash \Delta_2, \psi}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \vdash \Delta_1, \Delta_2, \psi} M\text{-}cut_1 \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_g}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \Theta_1} \quad \dfrac{\pi_{dd}\,\vdots}{\xi, \Theta_3, \Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\xi, \Gamma_1, \Gamma_3, \vdash \Delta_1, \Delta_3} M\text{-}cut_2}{\dfrac{\dfrac{(\psi \to \xi), \Gamma_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}{(\psi \to \xi), \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} ctr_g}{(\psi \to \xi), \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} ctr_d} \rightarrow_g$$

On vérifie attentivement les connexions :

Connexions	En π	En π'
$\Gamma_x \sim \Delta_x, \forall x \in \{1,2,3\}$	Inchangées	
$\Gamma_2 \sim \Delta_1$, $\Gamma_3 \sim \Delta_1$ et $\Gamma_3 \sim \Delta_2$	Impossible	
$\Gamma_1 \sim \Delta_2$	ssi $\Gamma_1 \sim \Theta_1$ en σ_g^- et $\Theta_2 \sim \Delta_2$ en σ_{dg}	
$\Gamma_1 \sim \Delta_3$	ssi $\Gamma_1 \sim \Theta_1$ en σ_g^- et $\Theta_3 \sim \Delta_3$ en σ_{dd}	
$\Gamma_2 \sim \Delta_3$	ssi $\Gamma_2 \sim \psi$ en σ_{dg} et $\xi \sim \Delta_3$ en σ_{dd}	

Les conditions sont donc les mêmes. *M-cut*$_1$ et *M-cut*$_2$ ont un degré égal à $d(M)$, mais leurs rangs de droite est inférieur à $rg(M_d)$. Il est donc possible d'obtenir par hypothèse de récurrence une preuve de σ sans coupures.

Puisque toute occurrence de formule dans un séquent conclusion est soit passive soit principale, en vertu de la remarque 3, nous avons examiné tous les cas.

Ainsi, nous avons établi un protocole d'élimination des coupures. Lorsque l'on cherche à supprimer une application – que l'on nomme M – de *M-cut* qui est la dernière règle d'une preuve de π, on procède ainsi :

— Si le rang de droite ou de gauche de M vaut 0, on peut créer une preuve sans coupures du même séquent.
— Si le rang de droite et le rang de gauche valent 1, il est possible soit d'établir une preuve sans coupures, soit d'obtenir une preuve où la *M-cut* qui y figure est de degré moindre que $d(M)$. En fonction du rang de cette *M-cut* introduite, il faut alors appliquer à nouveau l'un de ces trois pas.
— Si le rang de droite et le rang de gauche sont tous les deux supérieurs à 1, il est possible d'obtenir une preuve comportant des *M-cut* de rang inférieur à $rg(M)$. On itère alors la procédure à l'application de *M-cut* la plus haute dans la preuve, puis aux suivantes.

Il importe de noter que dans aucun de ces pas les *M-cut* introduites ne peuvent avoir de rang ou de degré supérieur à ceux de M. On est ainsi bien assuré que la procédure termine.

Démonstration (Élimination des coupures)**.** Il est possible d'associer à toute preuve en **LDC** π de σ une preuve π' de σ sans coupures.

Démonstration. *Cut* est une forme spéciale de *M-cut*, or d'après le lemme 5, il est possible de supprimer toutes les applications de *M-cut* de π les unes après les autres.

Commentaires

Remarque 12. La procédure d'élimination des coupures que l'on vient de décrire n'est pas déterministe :

— Lorsque les rangs de droite et de gauche valent tous les deux 0, on doit choisir quelle est la preuve que l'on conserve, autrement dit sur quel contexte on affaiblit.
— Lorsque les rangs de droite et de gauche d'une *M-cut* valent plus de 1, il faut choisir de quel côté on fera baisser le rang.

— Lorsque l'on transforme une preuve à l'aide du lemme 3 (page 10), si la dernière règle de la preuve est une $\vee_g$ ayant pour principale la formule à éliminer, il faut choisir quelle est la prémisse que l'on conserve.
— Lorsqu'il est nécessaire de « créer » une liaison, on peut choisir d'affaiblir l'un ou l'autre côté du séquent (mais on a résolu ce problème dans la démonstration du lemme 1 page 8 en supposant que l'on affaiblissait à gauche).
— Enfin, lorsque l'on doit affaiblir sur un multi-ensemble de formules qui compte au moins deux formules, il existe plusieurs façons de le faire, différents ordres.

Exemple 1. Afin d'illustrer ce propos nous allons effectuer deux pas de suppression des coupures sur cette preuve π :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \xi\vdash\Delta_1\end{array}}{\Gamma_1,\xi\vdash\Delta_1,\psi}\,M\text{-}cut(0,0)}{\Gamma_1\vdash\Delta_1,(\xi\to\psi)}\to_d \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \Gamma_2\vdash\xi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_4\\ \psi\vdash\Delta_2\end{array}}{(\xi\to\psi),\Gamma_2\vdash\Delta_2}\to_g}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,M\text{-}cut(1,1)$$

En σ_1	$\Gamma_1 \sim \psi$
En σ_2	$\xi \nsim \Delta_1$
En σ_3	$\Gamma_2 \nsim \xi$
En σ_4	$\psi \sim \Delta_2$

On suppose π_1, π_2, π_3 et π_4 sans coupures. Les liaisons respectent les contraintes posées (notamment par $\to_d$), et on sait qu'en conclusion de π la seule connexion qui existe est entre Γ_1 et Δ_2.

La procédure décrite nous oblige à commencer par supprimer la $M\text{-}cut(0,0)$, mais deux options s'offrent déjà à nous : on peut choisir de conserver la preuve π_1 et d'affaiblir sur les éléments de σ_2, ou de faire le contraire. Admettons que l'on opte pour cette première solution, un second choix s'offre à nous : on peut choisir d'affaiblir d'abord sur le contexte du côté droit de σ_2, puis sur son contexte gauche, ou le contraire [8]. Si on opte pour cette dernière solution, notre preuve, après un premier pas de réduction, devient :

$$\cfrac{\cfrac{\pi'_1\left\{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1\vdash\psi\end{array}}{\Gamma_1,\xi\vdash\psi}\,aff_g}{\Gamma_1,\xi\vdash\Delta_1,\psi}\,aff_d\right.}{\Gamma_1\vdash\Delta_1,(\xi\to\psi)}\to_d \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \Gamma_2\vdash\xi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_4\\ \psi\vdash\Delta_2\end{array}}{(\xi\to\psi),\Gamma_2\vdash\Delta_2}\to_g}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2}\,M\text{-}cut(1,1)$$

Pour simplifier la représentation on note π'_1 la preuve de $\Gamma_1,\xi\vdash\Delta_1,\psi$ que l'on obtient en éliminant de cette façon la $M\text{-}cut(0,0)$. Les affaiblissements n'introduisant aucune liaison, le séquent conclusion de π'_1 est de la forme requise.

On doit maintenant supprimer $M\text{-}cut(1,1)$. Deux options s'offrent une fois de plus à nous. On peut choisir de couper la conclusion de π'_1 sur σ_3, puis la résultante sur σ_4, et on a alors :

8. De plus si Δ_1 comporte plus d'une formule il y a un choix à faire dans l'ordre de leurs introductions par affaiblissements.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_3\\ \Gamma_2 \vdash \xi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi'_1\\ \Gamma_1, \xi \vdash \Delta_1, \psi\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \psi}\ M\text{-}cut(1,1) \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_4\\ \psi \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ M\text{-}cut(1,1)$$

On peut aussi choisir de couper d'abord la conclusion de π'_1 sur σ_4, puis sur σ_3, et on a dans ce cas :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_3\\ \Gamma_2 \vdash \xi\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi'_1\\ \Gamma_1, \xi \vdash \Delta_1, \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_4\\ \psi \vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1, \xi \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ M\text{-}cut(1,1)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ M\text{-}cut(1,1)$$

Les deux $M\text{-}cut(1,1)$ sont de degré inférieur à la $M\text{-}cut(1,1)$ de π. Les rangs de ces coupures dépendent du premier choix que l'on a fait, selon que l'on a introduit ξ ou ψ par affaiblissement à partir de π_1 ou de π_2.

Ainsi effectuer deux pas de réductions sur cette preuve π offre déjà une multitude de possibilités, et ces choix interfèrent sur tous les autres pas que l'on devra effectuer.

Il est cependant permis de penser que **LDC** peut se simplifier et qu'il est possible de trouver un algorithme d'élimination des coupures plus performant. Peut-être même le protocole *tq* peut-il s'appliquer à ce système, moyennant quelque modifications ?

Plusieurs pistes de recherche sont en effet ouvertes :

- *A priori*, il devrait être possible de modifier les règles de **LCD** pour obtenir un système monostyle.
- À première vue, il est possible de se passer de $M\text{-}cut(0,0)$, ce qui allégerait la démonstration.
- Le flou qui règne sur les règles d'affaiblissement pose problème. Kashima, dans [R. Kashima et T. Shimura(1994)], impose que les formules introduites par affaiblissements ne soient pas liées au contexte, alors que [Kashima(1991)] laisse cette possibilité. Or la latéralité qu'on avait de lier les formules ainsi introduites est utilisée pour les démonstrations de la remarque 10, du lemme 3, et bien sûr de nombreuses fois dans la démonstration du lemme 5. Dans ce dernier cas, on a exhibé au cas II. b) une alternative qui permet de s'en passer, peut-on la généraliser ?
- La raison pour laquelle il doit toujours y avoir au moins une formule dans le séquent conclusion d'un séquent n'a pas pu être cernée. Peut-on se passer de cette contrainte, et ainsi introduire la règle $\dfrac{}{\bot \vdash}\ efq$, qui rendrait le système **LDC** exactement équivalent à **LD** ? La question de la gestion des liens se poserait alors. La réponse varie en fonction du choix qu'on aura préalablement fait concernant la question de l'affaiblissement.

Conclusion

Il faut se poser la question du sens philosophique de ce système. D'après [van Atten(2009)], il n'y a aucune raison canonique qui pousse à l'étude de ce système, si ce n'est que « dès qu'on s'intéresse à des cas spéciaux des modèles de Kripke, c'est peut-être un choix évident ». On aurait ainsi un système né uniquement d'un jeu sur la sémantique, d'une contrainte infondée mais fructueuse. Cela ne doit pourtant pas nous empêcher d'interpréter la logique des domaines constants et le schéma (D), de leur créer une justification philosophique.

La notion de liens qu'introduit **LCD** est également intéressante : peut-on la rapprocher des logiques pertinentes ? Le lemme 1 nous enseigne que n'importe quelles formules peuvent être liées, mais que lorsque deux formules « ont quelque chose à voir », il n'est pas permis de l'ignorer. La façon dont se créent ou se perdent des connexions peut également mériter d'être étudiée.

La possibilité de plonger la logique des domaines constants dans la Logique Linéaire peut peut-être trouver une issue favorable grâce à la procédure d'élimination des coupures que l'on a proposé. V. De Paiva et L.C. Pereira ont tenté d'établir ce plongement dans [V. De Paiva et L.C. Pereira(1994)] et dans [V. De Paiva et L.C. Pereira(2005)] avec le système **FILL**.

Enfin, notre étude pourrait peut-être tirer enseignement des tentatives de poser une axiomatique sans coupures de **CD**, problème dont traitent [López-Escobar(1983)] et [C. Fiorentini et P. Miglioli(1999)].

Bibliographie

[Mostowski(1948)] A. MOSTOWSKI : Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus. *Journal of Symbolic Logic*, 13(4):204–207, Décembre 1948.

[Grzegorczyk(1964)] A. GRZEGORCZYK : A philosophically plausible formal interpretation of intuitionistic logic*. *Indagationes Mathematicae*, 26(5):596–601, 1964.

[Gabbay(1969)] D.M. GABBAY : Model theory for intuitionistic logic I*. Rapport technique 2, The Hebrew University of Jerusalem, 1969.

[Gornemann(1971)] S. GORNEMANN : A Logic Stronger Than Intuitionism. *Journal of Symbolic Logic*, 36(2):249–261, Juin 1971.

[Nagashima(1973)] T. NAGASHIMA : An intermediate predicate logic. *Hitotsubashi journal of arts and sciences*, 14(1):53–58, Sep. 1973.

[Kashima(1991)] R. KASHIMA : Cut-elimination theorem for the intermediate logic CD. Research report on information sciences c-100, Tokyo Institute of Technology, 1991.

[R. Kashima et T. Shimura(1994)] R. KASHIMA ET T. SHIMURA : Cut-elimination theorem for the logic of constant domains. *Mathematical Logic Quarterly*, 40(2):153–172, 1994.

[Maehara(1954)] S. MAEHARA : Eine Darstellung der intuitionistischen Logik in der klassischen*. *Nagoya mathematical journal*, 7:45–64, 1954.

[van Atten(2009)] M. van ATTEN : Question relative à la logique des domaines constants. *[Courrier électronique]*, Destinataires : J. Dubucs, C. Aubert, Août 2009. Communication personnelle.

[V. De Paiva et L.C. Pereira(1994)] V. DE PAIVA ET L.C. PEREIRA : A new formulation of intuitionistic logic. October 1994.

[V. De Paiva et L.C. Pereira(2005)] V. DE PAIVA ET L.C. PEREIRA : A short note on intuitionistic propositional logic with multiple conclusions. *Manuscrito-Rev Int. Fil. Campinas*, 28(2):317–329, 2005.

[López-Escobar(1983)] E. G. K. LÓPEZ-ESCOBAR : A second paper "on the interpolation theorem for the logic of constant domains". *Journal of Symbolic Logic*, 48(3):595–599, Sept. 1983.

[C. Fiorentini et P. Miglioli(1999)] C. FIORENTINI ET P. MIGLIOLI : A cut-free sequent calculus for the logic of constant domains with a limited amount of duplications. *Logic Journal of IGPL*, 7(6):733–753, 1999.

[Maehara(1970)] S. Maehara : A general theory of completeness proofs*. *Ann. of the Assoc. for Philosophy of Science*, 3:242–256, 1970.

[Ono(1973)] H. Ono : Incompleteness of semantics for intermediate predicate logics. I. *Proceedings of the Japan Academy*, 49(9):711–713, 1973.

[López-Escobar(1981)] E. G. K. López-Escobar : On the interpolation theorem for the logic of constant domains. *Journal of Symbolic Logic*, pages 87–88, 1981.

[Boričić(1986)] B.R. Boričić : A Cut-Free Gentzen-Type System for the Logic of the Weak Law of Excluded Middle. *Studia Logica*, 45(1):39–53, Mars 1986.

[Boričić(1988)] B.R. Boričić : On certain normalizable natural deduction formulations of some propositional intermediate logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 29(4), 1988.

[van Dalen(1999)] D. van Dalen : The Intuitionistic Conception of Logic. *European Review of Philosophy*, 4:45–78, 1999.

[Skvortsov(2000)] D. Skvortsov : On the Existence of Continua of Logics Between Some Intermediate Predicate Logics. *Studia Logica*, 64(2):257–270, Mars 2000.

Les ouvrages qui portent un * ne sont connus que par référence.

Certains de ces ouvrages ne sont pas cités dans le corps de ce mémoire, on les mentionne tout de même ici car ils traitent du schéma (*D*), de la logique des domaines constants ou des possibles formulations en calcul des séquents de la logique intuitionniste et de ses extensions.