

## Titre du projet de thèse :

Logique linéaire et classes de complexité sous-polynomiales

### Responsable scientifique et équipe d'accueil

Equipe d'accueil doctorale : Ecole doctorale Galilée (ED 146), Université Paris 13

Nom du directeur de thèse : Stefano Guerrini, PR.

Adresse : Laboratoire d'Informatique de l'Université Paris Nord (LIPN),  
UMR CNRS 7030, Institut Galilée - Université Paris 13  
99, Avenue Jean-Baptiste Clément 93430 Villetaneuse, France

Téléphone / Télécopie : 01.49.40.28.05 / 01.48.26.07.12

E-mail : Stefano.Guerrini@lipn.univ-paris13.fr

Co-encadrant de thèse : Virgile Mogbil, MCF, LIPN.

Téléphone : 01.49.40.36.84

E-mail : Virgile.Mogbil@lipn.univ-paris13.fr

Etudiant envisagé : Clément Aubert

Formation 2009-10 : M2R LMFI logique mathématique et fondements de l'informatique P7

M2R LOPHISS logique P1

Stage de master : *Réseaux de preuve Booléens*, encadré par P. Jacobé de Naurois et V. Mogbil, début 15 avril 2010.

(Cours et notes : Théorie de la démonstration P7 15/20, Calculabilité en incomplétude P7 14/20, Théorie des modèles et théorie des ensembles P7 11/20, Lambda-calcul et preuves P7 16/20, Logique P1)

### Contexte

La logique linéaire est une logique qui permet l'analyse et le contrôle des ressources utilisées dans la démonstration d'une assertion, et grâce à la correspondance entre preuves et programmes, des ressources utilisées par un programme (notamment lorsqu'il est écrit sous forme de terme du lambda-calcul). Ingrédients de base à la théorie de la complexité, ces ressources sont généralement le temps nécessaire aux calculs et l'espace utilisé en mémoire pour les réaliser.

Les résultats obtenus se sont avérés très utiles dans le développement de systèmes logiques pour la modélisation des calculs, ou de son correspondant logique, l'élimination des coupures. Notamment la logique linéaire a fourni de nombreux outils comme les réseaux de preuves, les réseaux d'interactions, les graphes de partages et la géométrie de l'interaction (GOI). Bien que chacun de ces outils fournit des méthodes et un point de vue très utile pour comprendre les autres, ils sont utilisés de façon indépendante, et ont montré leur puissance dans l'analyse et la résolution de problèmes distingués.

L'analyse des mécanismes de duplication et d'interaction à travers la logique linéaire a ainsi mené à la formulation de systèmes logiques à complexité bornée, et à l'élaboration de lambda-calculs correspondants. Cependant l'analyse actuelle de classes de complexité basées sur ces systèmes s'arrête à celle des classes hyper-exponentielles et de la classe P du temps d'exécution polynomial. Il existe aussi des extensions à la classe NP, mais ces résultats sont essentiellement obtenus par superposition en parallèle d'objets de la classe P. En cela ils ne permettent pas vraiment de mieux comprendre la structure de la classe NP par rapport à P, ni d'écrire de nouveaux langages non déterministes.

## Objectifs

Un des but de la thèse sera d'étendre l'analyse aux classes d'espace sous-polynomial comme la classe Logspace et aux classes intéressantes pour la parallélisation, comme les classes de circuits booléens AC et NC (classe des algorithmes efficacement parallélisables).

Les chemins que la GOI décrit sur les termes du lambda-calcul sont en correspondance avec les étapes de réductions de ces termes ; il en est donc de même de l'élimination des coupures dans les réseaux de preuve. Il y a eu des essais pour définir des systèmes à complexité préfixée en utilisant directement la GOI, mais le résultat obtenu [BP01] c'est arrêté aux fonctions Kalmar élémentaires et n'a pas permis d'obtenir un vrai langage.

Dans le cadre d'une récente et nouvelle approche à la GOI proposé par J-Y Girard il y a des résultats préliminaires [Gir10] qui montrent une façon d'obtenir des systèmes pour la classe Logspace non-déterministe dont on souhaite s'inspirer pour Logspace. D'autres résultats récents caractérisent Logspace mais n'utilisent aucuns des outils précédents [Sch07].

Les graphes de partage ont eu un rôle très important dans l'étude des implémentations optimales du lambda-calcul, comme établi par S. Guerrini [AG98, Gue99, Gue05]. Ils sont aussi une des implémentations la plus naturelle des lambda-calculs à complexité bornée. En même temps, il y a d'importantes questions ouvertes sur l'analyse de la complexité des réductions des graphes de partage, notamment sur les relations entre les réductions de gestion qui traitent du mécanisme d'appariement entre les noeuds qui communiquent et les réductions logiques qui correspondent à l'accomplissement d'une communication. La compréhension de ces relations pourra largement aider à la compréhension du champ effectif d'utilisation des implémentations de graphes de partage dans les systèmes à complexité bornée, et aider dans l'élaboration de nouveaux systèmes.

La nature des systèmes d'interaction et des graphes de partage semblent aussi très proche de celle des circuits booléens. Cela suggère donc comme autre thème de la thèse de chercher des codages basées sur des réseaux d'interaction ou sur des graphes de partage pour les classes sous-polynomiales des circuits booléens, afin d'élaborer des systèmes logiques correspondants. Des résultats caractérisant les classes de circuits booléens comme NC avec des réseaux de preuve ont été obtenus selon cette approche [Ter04], dont certaines extensions par V. Mogbil [MR07, Mog10].

Enfin, pour la représentation du non déterministe, l'extension aux réseaux et aux lambda-calcul différentiels semble être particulièrement prometteur. En effet on dispose alors directement d'opérateurs non déterministe parmi lesquels on peut coder des algèbres de processus. Avec une approche plus traditionnelle basée sur une généralisation des réseaux de preuve, V. Mogbil a caractérisé ce type d'algèbres [BM10].

## Environnement

La thématique de la logique linéaire est présente au LIPN (UMR 7030) depuis une dizaine d'année au sein de l'équipe Logique, Calcul et Raisonnement. Elle concerne aujourd'hui un groupe de 8 membres permanents (3 professeurs, 2 maîtres de conférences, 2 chargés de recherche 1ère classe, et 1 chaire CNRS). Le groupe est très impliqué sur le plan international comme national.

Ce sujet de thèse vient compléter les recherches qui sont menées dans l'ANR Blanc COMPLICE (Complexité Implicite, Concurrence et Extraction, 2009-2013) auquel participe activement le LIPN. Il est aussi thématiquement intégré au GDR IM GEOCAL (Groupement De Recherche, Informatique Mathématique, pôle "Logique et complexité" : Géométrie du Calcul, depuis 2006), et fait suite aux activités de l'équipe dans le DIM-LSC COLLODI (Domaine d'Intérêt Majeur "Logiciels et Systèmes Complexes" : Complexity and concurrency through ludics and differential linear logic, 2009-10). Sur le plan international, ce sujet s'insère naturellement dans le projet européen PICS "Logique linéaire et applications" (Projet International de Coopération Scientifique, France-Italie, 2010-13).

**Compétences des encadrants :** réseaux de preuve de la logique linéaire, théorie des réductions du lambda-calcul, réseaux d'interaction, graphes de partage et implémentation des langages de programmation fonctionnel, langages à complexité bornée, caractérisations logiques de classes de complexité.

## Références

- [AG98] A. Asperti and S. Guerrini. *The optimal Implementation of Functional Programming Languages*. CTTCS, 45. CUP, 1998.
- [BM10] Emmanuel Beffara and Virgile Mogbil. Concurrent processes as wireless proof nets. Technical Report hal-00462484, 24 pp., LIPN, February 2010.
- [BP01] Patrick Baillot and Marco Pedicini. Elementary complexity and geometry of interaction. *Fundam. Inform.*, 45(1-2) :1–31, 2001.
- [Gir10] Jean-Yves Girard. Goi and logspace. Communication au groupe de travaille sur la Géométrie de l'Interaction (PPS Paris 7, LIPN Paris 13 et IML Marseille), 2010.
- [Gue99] Stefano Guerrini. A general theory of sharing graphs. *Theoretical Computer Science*, 227(1-2) :99–151, 1999.
- [Gue05] Stefano Guerrini. Sharing implementations of graph rewriting systems. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 127(5) :113–132, 2005.
- [Mog10] Virgile Mogbil. Non-deterministic boolean proof nets. In *forthcoming proceedings of the International Workshop on Foundational and Practical Aspects of Resource Analysis (FOPARA'09)*, 15 pp., Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2010.
- [MR07] Virgile Mogbil and Vincent Rahli. Uniform circuits, & boolean proof nets. In Sergei N. Artëmov and Anil Nerode, editors, *LFCS*, volume 4514 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 401–421. Springer, 2007.
- [Sch07] Ulrich Schöpp. Stratified bounded affine logic for logarithmic space. In *LICS*, pages 411–420. IEEE Computer Society, 2007.
- [Ter04] Kazushige Terui. Proof nets and boolean circuits. In *LICS*, pages 182–191. IEEE Computer Society, 2004.